UNIT-ONE

Syllabus:

❑ Vector Analysis:
- Concept of vectors and scalars
- Dot and cross product
- Vector differentiation
- Gradient, vector integration, curl, divergence

❑ Law of motion:
- Projectile motion, Newtons law
- Frictional force, impulse and momentum
- Conservation of liner momentum
- Elastic and inelastic collisions

❑ Work and energy:
- Work and kinetic energy
- Conservative and non conservative forces
- Work done gravitional force and spring force
- Work and potential energy
- Gravitational potential energy
- Work energy theorem
- Conservation of energy

❑ Rotational motion:
- Rotational variables
- Torque, moment of inertia and its calculation
- Kinetic energy of rotation
- Angular momentum and its conservation
- Radius of gyration

বিগত সাল:

১.স্কেলার গুণফল এবং ভেক্টর গুণফল কাকে বলে? (২০২৩)

২.প্রাস কাকে বলে? দেখাও যে, প্রাসের চলরেখা একটি অধিবৃত্ত বা প্যারাবোলা। (২০১০)

৩. Gradient, divergence এবং curl কাকে বলে? এদের ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)

৪.কেন্দ্রমুখী ত্বরণ এবং কেন্দ্রমুখী বল কাকে বলে? রাশিমালা প্রতিপাদন করুন। (২০১০, ২০১৬, ২০১৮)

৫.ভরবেগের নিত্যতা সূত্র লিখুন এবং প্রতিপাদন করুন। (২০১৫)

৬. দেখাও যে, ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি কোণ পরস্পর সমান। (২০১৮)

৭.প্রমাণ কর, দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক একমাত্রিক সংঘর্ষ হলে, এরা একে অপরকে বেগ বিনিময় করে। (২০১৩)

৮. দেখাও যে, $\vec{F} = \sum m\vec{a}$, এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। (২০১৩)

৯. ১টি অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১২, ২০১৮)
অথবা, দেখাও যে, দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক তার গতিশক্তির দ্বিগুণ। (২০১২, ২০১৮)
১০. জড়তার ভ্রামক এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে। (২০১২, ২০১৮)
১১.জড়তার ভ্রামক সম্পর্কিত লম্ব অক্ষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং প্রমাণ করুন। (২০১০)
১২. জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং প্রমাণ করুন। (২০১৭)
১৩. একটি বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্রাগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১০)
১৪. নিজ অক্ষের সাপেক্ষে একটি নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করুন। (২০১১)
১৫. টর্ক কাকে বলে? টর্ক এবং কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন। (২০১৭)
১৬. কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা ও সংরক্ষণ সূত্র লিখুন। (২০০৯)
১৭. প্রমাণ কর যে, কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর প্রযুক্ত টর্কের সমান। (২০০৯, ২০১১)
১৮. যদি $\vec{A}=\vec{r}\,r^{-1}$ হয় তবে প্রমাণ করুন, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})=-2r^{-3}\,\vec{r}$ (২০১৮, ২০১৯, ২০১৭)

অথবা, যদি $\vec{A}=\frac{\vec{r}}{r}$ হয় তবে $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$

১৯. প্রমাণ করুন, $\nabla^2(\frac{1}{r})=0$ (২০০৯, ২০১১, ২০১৪, ২০১৭)

২০. প্রমাণ করুন $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$ (২০১৬)

২১.প্রমাণ করুন $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0$ (২০১৩)

২২. প্রমাণ করুন $\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})=[ABC]$ (২০১২)

২৩. $\vec{\nabla}(\ln r)=\frac{1}{r^2}$ (২০১০)

২৪. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ (২০১৩)

❖ যে সকল প্রশ্ন দ্বারা এই অধ্যায় সাজানো হয়েছেঃ

১.স্কেলার গুণফল এবং ভেক্টর গুণফল কাকে বলে? (২০২৩)
২.স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফলের পার্থক্য লিখুন।
৩. ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশির মধ্যে পার্থক্য লিখুন।
৪.অপারেটর এবং Differential অপারেটর (ডেল ∇) কাকে বলে?
৫.Gradient কাকে বলে? এর ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)
৬. Divergence কাকে বলে? এর ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)
৭.কার্ল কাকে বলে? এর ভৌত তাৎপর্য আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)
৮. দেখাও যে, ১টি সামন্তরিকের সন্নিহিত বাহু তিনটি $\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{B}}$ ও $\vec{\mathbf{C}}$ দ্বারা নির্দিষ্ট হলে এর আয়তন = $\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})$. (২০১৩, ২০১৬)
৯.a এর মান কত হলে, $\vec{\mathbf{A}}=2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{C}}=4\hat{\mathbf{i}}-+\hat{\mathbf{j}}+a\vec{\mathbf{k}}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে। $\vec{\mathbf{B}}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$ (২০০৯)
১০. যদি $\vec{\mathbf{A}}=\vec{\mathbf{r}}\,\mathbf{r}^{-1}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\,.\,\vec{\mathbf{A}})=-2\mathbf{r}^{-3}\vec{\mathbf{r}}$. (২০১৮, ২০১৯)

১১.প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\right)=\mathbf{0}$ (২০০৯, ২০১১, ২০১৪, ২০১৭)

১২.প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})=\mathbf{0}$. (২০১৬)

১৩. প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)=\mathbf{0}$ (২০১৩)

১৪.প্রমাণ কর যে, $\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})=\left[\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{C}}\right]$ (২০১২)

১৫. প্রমাণ কর যে, $\nabla(\mathbf{lnr})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}^2}$ এখানে চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

১৬. প্রাস কাকে বলে? প্রমাণ কর যে,প্রাসের চলরেখ একটি অধিবৃত্ত বা প্যারাবোলা । (২০১০)

১৭. রৈখিক দ্রুতি ও কৌণিক দ্রুতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন। $V=\omega r$

১৮. রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের সম্পর্ক স্থাপন করুন। $\vec{\mathbf{v}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}}$

১৯. কেন্দ্রমুখী ত্বরণ এবং কেন্দ্রমুখী বল কাকে বলে। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বা বলের রাশিমালা প্রতিপাদন করুন। (২০১০, ২০১৬, ২০১৮)

২০. ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র লিখুন এবং প্রতিপাদন করুন। (২০১৫)

২১. দেখাও যে, ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি কোণ পরস্পর সমান। (২০১৮)

২২. দেখাও যে, সমান ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক একমাত্রিক সংঘর্ষ হলে, এরা একে অপরকে বেগ বিনিময় করে। (২০১৩)

২৩. দেখাও যে, $\vec{\mathbf{F}}=\sum\mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$, এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। (২০১৩)

২৪. ১টি অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১২, ২০১৮)

২৫. জড়তার ভ্রামক এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে? (২০১২, ২০১৮)

২৬. জড়তার ভ্রামক সম্পর্কিত লম্ব অক্ষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং প্রমাণ করুন। (২০১০)

২৭. জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং প্রমাণ করুন। (২০১৭)

২৮. একটি বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১০)

২৯. নিত্য অক্ষের সাপেক্ষে একটি নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১১)

৩০. ১টি সরু ও সুষম দন্ডের দৈর্ঘ্যে মধ্য দিয়ে এবং দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

৩১. একটি সরু ও সুষম দন্ডের এক প্রান্ত দিয়ে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করুন।

৩২. টর্ক কাকে বলে? টর্ক ও কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন। $\tau = I\alpha$ (২০১৭)

৩৩. কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে? কৌণিক ভরবেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক $L = I_{\omega}$ প্রমাণ করুন।

৩৪. কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র লিখুন। (২০০৯)

৩৫. প্রমাণ কর যে, কোনো কণিকার কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর প্রযুক্ত টর্কের সমান। (২০০৯, ২০১১)

৩৬. সংরক্ষণ বল কী? পরিবর্তনশীল বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ বের করুন। $\mathbf{W}=\int\vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{ds}}$ (২০১১, ২০১৩, ২০১৬)

৩৭. স্প্রি বল দ্বারা কৃত কাজের হিসাব বের করুন।

৩৮. মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজের হিসাব করুন।

৩৯. শক্তি, যান্ত্রিক শক্তি, গতিশক্তি কাকে বলে। প্রমাণ কর যে, $\mathbf{W}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{mv}^2$

অথবা, গতিশক্তি ও ভরবেগের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন।

৪০. ধ্রুব বলের জন্য কাজ শক্তি উপপাদ্য ব্যাখ্যা করুন।(২০১৪, ২০১৮, ২০২৩)

অথবা,পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজের পরিমাণ ব্যাখ্যা করুন।

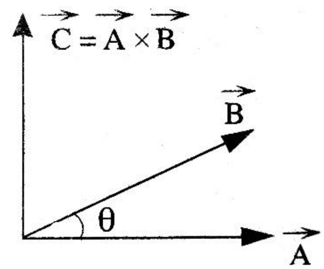
৪১. বিভব শক্তি বা স্থিতি শক্তি কাকে বলে। শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা নীতি লিখুন।(২০১২, ২০১৮, ২০১৯)

৪২. যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা লিখুন। অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা ব্যাখ্যা বা প্রমাণ করুন। (২০১৭)

৪৩. সরল দোলকের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা ব্যাখ্যা করুন। (২০১৯, ২০১৮, ২০১২)

প্রশ্ন-১: স্কেলার গুণফল এবং ভেক্টর গুণফল কাকে বলে? (২০২৩)

উত্তর: **স্কেলার গুণফল:** দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন বলে। ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম কোণের cosine এর গুণফলকে স্কেলার গুণফল বা ডট গুণফল বলে।



ব্যাখ্যা:

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে সংজ্ঞানুসারে

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \text{ (যখন } 0 \leq \theta \leq \pi)$$

কিন্তু Bcosθ হচ্ছে A এর দিকে B এর উপাংশ বা $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ। একইভাবে Acosθ হচ্ছে B এর দিকে A এর উপাংশ।

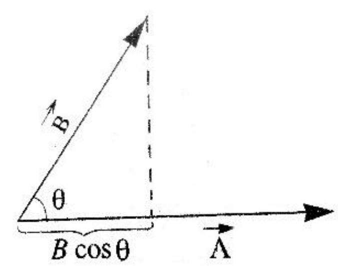
সুতরাং যে কোন দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে আমরা যে একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের ওপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝি।

উদাহরণ:

বল $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ এর স্কেলার গুণফল কাজ $W = \vec{F}.\vec{S} = FS\cos\theta$ স্কেলার রাশি।

ভেক্টর গুণফল: দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বলে।

ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম কোণের sine এর গুণফলকে ভেক্টর গুণফলের মান বলে।

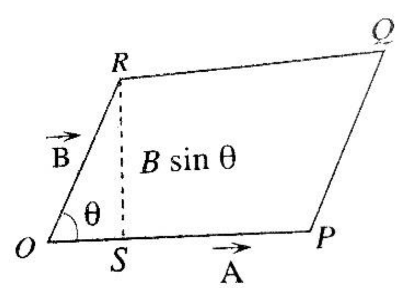


ব্যাখ্যা:

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভূক্ত কোণ θ হলে আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণফলে যে নতুন ভেক্টর পাই-

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow \hat{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \ (0 \leq 0 \leq \pi)$$

$\Rightarrow$ C = AB sinθ



এখানে $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{C}$ এর দিক নির্দেশ করে। এই $\hat{n}$ এর মান 1 এবং এর দিক ডানহাতি স্ক্রু নিময় থেকে পাওয়া যায়।

কিন্তু Bsinθ হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত OPQR সামন্তরিকের উচ্চতা।

$\therefore$ C = AB sinθ

$= OP \times OR \sin\theta$

$= OP \times OR \times \frac{RS}{OR}$

$= A \times h$

= সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল

সুতরাং দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুটিতে সন্নিহিত বাহু ধরে কল্পিত সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

উদাহরণঃ

টর্ক $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= \hat{n} rF \sin\theta$

$\therefore \tau = rF \sin\theta$

প্রশ্ন-২: স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফলের পার্থক্য লিখুন।

উত্তরঃ

স্কেলার গুণফল	ভেক্টর গুণফল
• স্কেলার গুণফল ১টি স্কেলার রাশি। এর কোন দিক নেই।	• ভেক্টর রাশি ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে দিক পাওয়া যায়।
• $C= AB \cos\theta$	• $C= AB \sin\theta$
• বিনিময় সূত্র মেনে চলে।	• বিনিময় সূত্র মেনে চলে মানে না।
• ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।	• সমান্তরাল হলে ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

প্রশ্ন-৩: ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশির মধ্যে পার্থক্য লিখুন।

উত্তরঃ

স্কেলার রাশি	ভেক্টর রাশি
• প্রকাশ করার জন্য দিকের প্রয়োজন হয় না। দৈর্ঘ্য, ভর, দ্রুতি।	• মান ও দিক উভয় লাগে। সরণ, বেগ, ওজন।
• মানের পরিবর্তন হলে স্কেলার রাশির পরিবর্তন হয়।	• উভয়ের পরিবর্তন লাগে।
• যোগ, বিয়োগ সাধারণ গণিতের সূত্র মেনে চলে।	• গাণিতিক নিয়মে হয় না। ভেক্টর বীজগণিতের নিয়মানুসারে হয়।
• দুটি স্কেলার রাশির গুণফল সর্বদা স্কেলার রাশি হয়।	• স্কেলার বা ভেক্টর হতে পারে।

প্রশ্ন-৪: অপারেটর এবং Differential অপারেটর (ডেল ∇) কাকে বলে?

উত্তর: **অপারেটর:** যে গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তরিত করে তাকে Operator বলে।

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ভেক্টর Differentioal operator: ত্রিমাত্রিক ভৌত রাশির বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণের জন্য এবং বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য স্যার হেমিলটন আবিষ্কার করেন Vector differential operator। প্রমাণ করা যায়,

$$\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

প্রশ্ন-৫: Gradient কাকে বলে? এর ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)

উত্তর: যদি কোনো স্থানের একটি জায়গায় প্রতিটি বিন্দুতে φ(x, y, z) কে একটি অন্তরীকরনযোগ্য রাশি হিসাবে গণ্য করা যায় তাহলে Gradient হবে।

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

বা, $$\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

ভৌত ধর্ম:

- এটি ভেক্টর রাশি $\vec{\nabla}\varphi$
- কোনো অবস্থানে ভেক্টরের মানের Gradient ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর নির্দেশ করে।
- Vector differential operator $\vec{\nabla}$ এর সাথে φ এর সাধারণ গুণফলকে Gradient বলে।
- স্কেলার বিভবের gradient সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রে প্রাবল্য নির্দেশ করে $E = \vec{\nabla}\vec{V}$
- কোনো বিন্দুতে স্কেলার ক্ষেত্রের Gradient এর দিক ঐ বিন্দুতে স্কেলার ক্ষেত্রের মান বৃদ্ধির দিকে হয়।

প্রশ্ন-৬: Divergence কাকে বলে? এর ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)

উত্তর: যদি কোনো স্থানের একটি জায়গায় প্রতিটি বিন্দুতে $\vec{V}(x,y,z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ কে ১টি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হিসাবে গণ্য করা যায়, তাহলে–

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{V}$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

<u>ভৌত ধর্ম:</u>

- কোন ভেক্টরের Divergence একটি স্কেলার রাশি।
- $\vec{\nabla}\,\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তন বুঝায়।
- Divergence শূন্য হলে $(\vec{\nabla}.\vec{V}=0)$ ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল বা চৌঙাকৃতি বলা হয়।
- দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর ক্ষেত্রে $\vec{P}.\vec{Q}=\vec{Q}.\vec{P}$ হলেও $\vec{\nabla}.\vec{V}=\vec{V}\vec{\nabla}$ কখনও নয়।
- ক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ Divergence সংশ্লিষ্ট ভৌত ঘনত্বের (∂) এর সমানুপাতিক $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\partial}{E_0}$

প্রশ্ন-৭: কার্ল কাকে বলে? এর ভৌত ধর্ম আলোচনা করুন। (২০১৮, ২০১৯)

উত্তর: যদি কোনো স্থানের একটি জায়গায় প্রতিটি বিন্দুতে V(x,y,z)= $V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}$ কে একটি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হিসাবে গণ্য করা যায় তাহলে $\vec{V}$ এর কার্ল (Curl) হবে–

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}$$

<u>ভৌত ধর্ম:</u>

- ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি।
- কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্লের Divergence শূন্য।
- কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর যার দিক ঐ ক্ষেত্রের লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।
- কোনো ঘূর্ণনশীল ক্ষেত্রের বেগের কার্ল ঐ ক্ষেত্রের কৌণিক বেগের দ্বিগুণ। $\vec{\nabla}\times\vec{V}=2\vec{\omega}$
- কার্ল থেকে জানা যায় ক্ষেত্রটি ঘূর্ণনশীল না অঘূর্ণনশীল।
- কোনো ভেক্টরের কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে।
- কার্ল শূন্য হলে ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন-৯: a এর মান কত হলে, $\vec{\mathbf{A}}=2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{C}}=4\hat{\mathbf{i}}-+\hat{\mathbf{j}}+\mathbf{a}\vec{\mathbf{k}}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে। $\vec{\mathbf{B}}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$ (২০০৯)

উত্তর: আমরা জানি, $\vec{A},\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ সমতলীয় হলে $\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})=0$ হবে

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & -1 & a\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(2a-3)-\hat{j}(a+12)+\hat{k}(-1-8)$$

$$=\hat{i}(2a-3)-\hat{j}(a+12)+9\hat{k}$$

সুতরাং $A.(\vec{B}\times\vec{C}) = (2i - j + k)\{\hat{i}(2a-3) - \hat{j}(a+12) - \hat{k}9\}$

$= 2(2a-3) + (a+12) - 9$

$= 4a - 6 + a + 12 - 9$

$= 5a - 3$

$\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হওয়ার ক্ষেত্রে $\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ হবে

$\therefore 5a - 3 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{3}{5} (Ans.)$

<u>Note</u>: (+) (–) (+) = সোজাসুজি গুণ।

প্রশ্ন-১০: যদি $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{r}}\,\mathbf{r}^{-1}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\nabla(\nabla . \vec{\mathbf{A}}) = -2\mathbf{r}^{-3}\vec{\mathbf{r}}$. (২০১৮, ২০১৯)

উত্তর: দেওয়া আছে, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$

প্রশ্ন থেকে আমরা পাই,

$A = \vec{r}\, r^{-1}$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\{x(\underline{x^2+y^2+z^2}\}^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y}\{y(\underline{x^2+y^2+z^2}\}^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z}\{z(\underline{x^2+y^2+z^2}\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = x\left(-\frac{1}{2}\right).(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + y.-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2y$$

$$+(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + 2.-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2z + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

[UV প্রয়োগ করে পাই]

Note: দাগ দিয়ে তিনটিকে UV করা হয়েছে।

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = -x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(-x^2-y^2-z^2) + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

[$(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ কমন নিয়ে]

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = -(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A} = 3.(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{A} = 2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

এখন বামপক্ষ থেকে পাই-

বামপক্ষ $= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$

$$= \vec{\nabla}\left\{2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left\{2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= 2\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + 2\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + 2\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\hat{i}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2x + \hat{j}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2y + \hat{k}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2z\right]$$

$$= 2\left[-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.x\hat{i} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}y\hat{j} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}z\hat{k}\right]$$

$$= -2\left\{(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\right\}$$

$= -2(r^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{r} = -2r^{-3}\vec{r} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১১: প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{0}$ (২০০৯, ২০১১, ২০১৪, ২০১৭)

উত্তরঃ আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

এখন $\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ....(i)

প্রথম diffferentiation $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x$

$$= -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

দ্বিতীয় diffferentiation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] \qquad \left[\because \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= (-x)(-\frac{3}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2x + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$ [UV সূত্র প্রয়োগ করে]

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2-x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Note: বুঝার জন্য
ধরি, $x^2+y^2+z^2=a$

$$\therefore \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}$$

$$= a^1 = a = x^2+y^2+z^2$$

$$= \frac{3x^2-x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

অনুরূপভাবে $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

এবং $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

তিনটি রাশি যোগ করে পাই–

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-z^2-x^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-১২: প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})=\mathbf{0}$. (২০১৬)

উত্তর: বামপক্ষ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

$$= \vec{\nabla}.\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\nabla}.\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{i}+\hat{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}$$

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ $\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১৩: প্রমাণ কর যে, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)=\mathbf{0}$ (২০১৩)

উত্তর: বামপক্ষ $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)$

$$= \vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]+\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right]+\hat{j}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right]+\hat{k}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right]$$

$= \hat{i}.0+\hat{j}0+\hat{k}.0=0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১৪: প্রমাণ কর যে, $\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})=\left[\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{C}}\right]$ (২০১২)

উত্তর: এখানে $\vec{A}=[A_1,A_2,A_3],\vec{B}=[B_1,B_2,B_3]$ এবং $\vec{C}=[C_1,C_2,C_3]$

$$\therefore \text{ডানপক্ষ} = \left|\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right|=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

এখন বামপক্ষের $\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}B_2 & B_3\\ C_2 & C_3\end{vmatrix}+\hat{j}\begin{vmatrix}B_1 & B_3\\ C_1 & C_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}B_1 & B_2\\ C_1 & C_2\end{vmatrix}$

$\therefore$ বামপক্ষ $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=A_1\begin{vmatrix}B_2 & B_3\\ C_2 & C_3\end{vmatrix}+A_2\begin{vmatrix}B_1 & B_3\\ C_1 & C_3\end{vmatrix}+A_3\begin{vmatrix}B_1 & B_2\\ C_1 & C_2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

= ডানপক্ষ

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১৫: প্রমাণ কর যে, $\nabla(\mathbf{lnr})=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r^2}}$ এখানে চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

উত্তর: এখানে $\nabla=\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

এবং $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

বামপক্ষ $\nabla^2(\ln r)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}$

$$\Rightarrow \nabla^2(\ln r)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}+\frac{\partial^2}{\partial z}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

................(i)

এখন $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\{\ln(x^2+y^2+z^2\}\right]=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1.2x}{x^2+y^2+z^2}\right]$

$=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)}\right]=\dfrac{\partial}{\partial x}\{x(x^2+y^2+z^2)^{-1}\}$

$=x(-1)(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2x+(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ [UV সূত্র]

$=(x^2+y^2+z^2)^{-1}-2x^2(x^2+y^2+z^2)^{-2}$

$=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$=\dfrac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$$= \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

অনুরূপভাবে $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

এবং $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\} = \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

(i) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই-

$$\nabla^2(\ln r) = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\ln r) = \frac{y^2+z^2-x^2+z^2+x^2-y^2+x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\ln r) = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\ln r) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

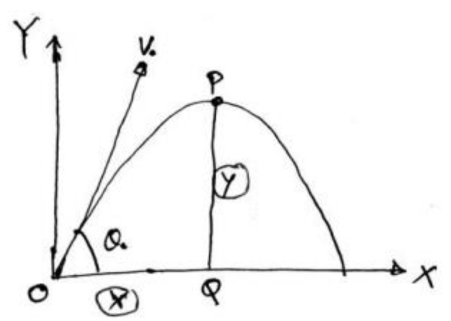
$$\Rightarrow \nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$$

$\therefore \nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১৬: প্রাস কাকে বলে? প্রাসের চলরেখ একটি অধিবৃত্ত বা প্যারাবোলা প্রমাণ করুন। (২০১০,২০২৪)

উত্তর: **প্রাস:** কোন বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে কোন স্থানে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বলে।

প্রমাণ: ধরি, একটি বস্তুকে V_0 আদিবেগে অনুভূমিকের সাথে θ_0 কোণ করে নিক্ষেপ করা হলো। মনে করি বস্তুটির আদিবেগের অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ যথাক্রমে



$V_{x_0} = V_0 \cos\theta_0$

$V_{y_0} = V_0 \sin\theta_0$

ধরি, নিক্ষেপের t সময় পরে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির অবস্থান P বিন্দুতে। এখানে OQ = x, PQ = y

সুতরাং t সময়ে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব

$x = V_0 \cos\theta_0 t$ [x অক্ষ বরাবর ত্বরণ শূন্য] ....(i)

$$\Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

এবং t সময়ে অতিক্রান্ত উলম্ব দূরত্ব

$y = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ ....(ii)

$\Rightarrow\ y = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

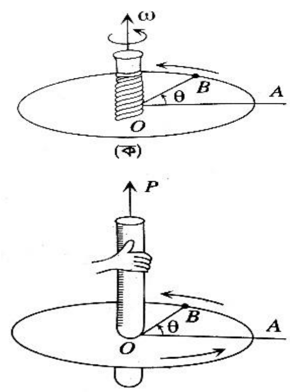
$\Rightarrow\ y = v_0 \sin\theta_0 \frac{x}{v.\cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$ [t এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow\ y = bx - cx^2$ [ধরি, $\tan\theta = b,\ \frac{1}{2}\frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\theta_0} = c$]

$\therefore$ $y=bx-cx^2$ যা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

প্রশ্ন-১৭: রৈখিক দ্রুতি ও কৌণিক দ্রুতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন। V=ωr

উত্তরঃ মনে করি, r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ১টি বস্তু v সমদ্রুতিতে ঘুরছে। বস্তুটির সমগ্র বৃত্তাকার পথ একবার ঘুরে আসলে $2\pi r$ রৈখিক দূরত্ব অতিক্রম করে। সময় লাগে T এবং বৃত্তের কেন্দ্রে 2π কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore$ রৈখিক দ্রুতি (v) হচ্ছে একক সময়ে অতিক্রান্ত রৈখিক দূরত্ব

$v = \frac{\text{রৈখিক দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

$\Rightarrow\ v = \frac{2\pi r}{T}$ ....(i)

কিন্তু একক সময়ে অতিক্রান্ত কৌণিক দূরত্ব হচ্ছে কৌণিক দ্রুতি ω

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

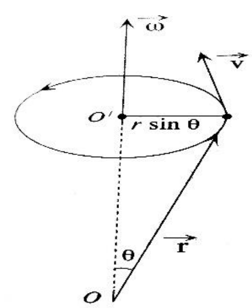
(i) নং থেকে v= rω (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-১৮: রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের সম্পর্ক স্থাপন করুন। $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$

উত্তরঃ ধরা যাক, প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ যা ধনাত্মক z অক্ষের সাথে তথা ω দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং বস্তুটি যে বৃত্তাকার পথে ঘুরে তার ব্যাসার্ধ rsinθ। বস্তুটির পর্যায়কাল T হলে তার রৈখিক বেগের মান

$v = \frac{2\pi r \sin\theta}{T} = v = \omega r \sin\theta \Rightarrow \vec{v} = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$ (**প্রমাণিত**)

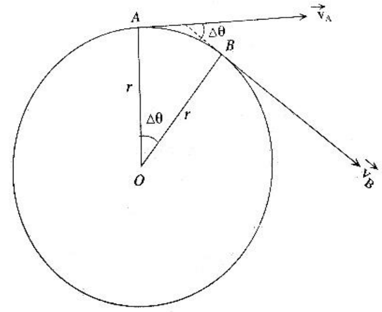


প্রশ্ন-১৯: কেন্দ্রমুখী ত্বরণ এবং কেন্দ্রমুখী বল কাকে বলে। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বা বলের রাশিমালা প্রতিপাদন করুন। (২০১০, ২০১৬, ২০১৮)

উত্তরঃ **কেন্দ্রমুখী ত্বরণঃ** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বৃত্তাকার পথে চলমান কোন বস্তুর সময়ের সাথে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে বেগের পরিবর্তনের হারকে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলে।

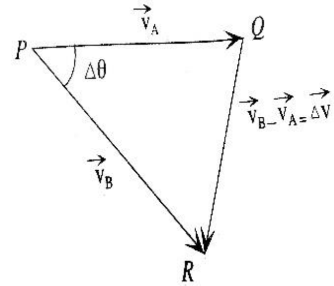
কেন্দ্রমুখী বলঃ যখন কোন বস্তু একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ঐ বৃত্তের কেন্দ্র অভিমুখে যে নিট বল ক্রিয়া করে বস্তুটিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল রাখে তাকে কেন্দ্রমুখী বল বলে।

বলের রাশিমালা: ধরা যাক, m ভরের কোন বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে V সমদ্রুতিতে চলতে চলতে কোন এক সময় A বিন্দুতে আসে। A বিন্দুতে এর বেগ $\overrightarrow{V_A}$ বৃত্তটির ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর। ক্ষুদ্র সময় Δt পরে বস্তুটি B বিন্দুতে এল। এই সময় এর বেগ $\overrightarrow{V_B}$ বৃত্তের B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর। ধরা যাক কৌণিক সরণ $\Delta\theta$ খুবই ছোট।



বেগের পরিবর্তন $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$ কে $\overrightarrow{QR}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। যেহেতু $\Delta\theta$ কোনটি খুবই ছোট, কাজেই $\overrightarrow{\Delta V}$ এর অভিমুখ $\overrightarrow{V_A}$ ও $\overrightarrow{V_B}$ উভয়ের সাথে প্রায়ই লম্ব।

চিত্র (খ) থেকে $\Delta\theta = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{|\overrightarrow{QR}|}{\overrightarrow{V_A}} = \frac{|\overrightarrow{\Delta V}|}{V}$



$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta V} = V\Delta\theta$ ....(i)

এখানে V হচ্ছে $\overrightarrow{V_A}$ এবং $\overrightarrow{V_B}$ এর মান বস্তুটি সমদ্রুতিতে চলছে বলে উভয়ের মান সমান

এখন কেন্দ্রমুখী ত্বরণ a হলে

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\overrightarrow{\Delta V}|}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow V \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad = V\frac{d\theta}{dt} = V\omega$$

$$\Rightarrow a = V\omega$$

$$\Rightarrow a = V.\frac{v}{r} \quad [\because v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}]$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad [\because v^2 = r^2\omega^2]$$

$$\Rightarrow \frac{F}{m} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r}{r} \quad [\because F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}]$$

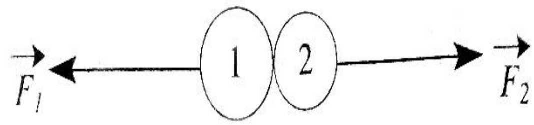
$\Rightarrow F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ দেখানো হলো।

প্রশ্ন-২০: ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র লিখুন এবং প্রতিপাদন করুন। (২০১৫)

উত্তর: **সূত্র:** যখন কোন ব্যবস্থার উপর প্রযুক্ত নিট বাহ্যিক বল শূন্য হয়, তখন ব্যবস্থাটির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

ব্যাখ্যা: আদি ভরবেরগ $\vec{P_i}$ এবং শেষ ভরবেগ $\vec{P_f}$ হলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী $\vec{P_i} = \vec{P_f}$

যেহেতু ভরবেগ $\vec{P}$ একটি ভেক্টর রাশি, সুতরাং $\vec{P}$ সংরক্ষিত হওয়ার অর্থ এর মান ও দিক উভয়ই অপরিবর্তিত থাকে।



প্রতিপাদন:

দুটি বস্তু বিবেচনা করি যারা কোন এক সময় সংঘর্ষে লিপ্ত হলো।

$\vec{F}_1$ = ১ম বস্তুর উপর ২য় বস্তু কর্তৃক প্রযুক্ত বল

$\vec{F}_2$ = ২য় বস্তুর উপর ১ম বস্তু কর্তৃক প্রযুক্ত বল

এখন ১ম বস্তুর ভরবেগ $\vec{P_1}$ এবং ২য় বস্তুর ভরবেগ $\vec{P_2}$ হলে নিউটনের ২য় সূত্রানুসারে

$\vec{F_1} = \frac{d\vec{P_1}}{dt}$ এবং $\vec{F_2} = \frac{d\vec{P_2}}{dt}$

এখন নিউটনের ৩য় সূত্রানুসারে

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

বা, $\vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P_1}}{dt} + \frac{d\vec{P_2}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{P_1} + \vec{P_2}) = 0$$

কিন্তু $\vec{P_1} + \vec{P_2}$ হচ্ছে ব্যবস্থার মোট ভরবেগ বা $\vec{P}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \left[\because \vec{P_1} + \vec{P_2} = P\right]$$

যেহেতু সময়ের সাপেক্ষে মোট ভরবেগ $\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$ এর বৃদ্ধি শূন্য, তাই মোট ভরবেগ $\vec{P}$ ধ্রুব থাকে

$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} =$ ধ্রুব

$$\Rightarrow \vec{P_i} = \vec{P_f}$$

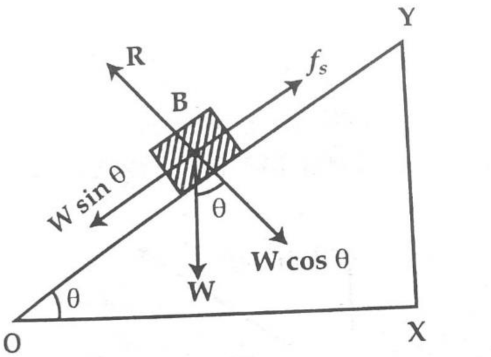
$$\Rightarrow \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

সুতরাং দেখা যায়, সংঘর্ষের আগে কোন ব্যবস্থার ভরবেগের সমষ্টি আর সংঘর্ষের পর ভরবেগের ভেক্টর সমষ্টি সর্বদা সমান থাকে।

এটিই ভরবেগের সংরক্ষণ বা নিত্যতার সূত্র।

প্রশ্ন-২১: দেখাও যে, ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি কোণ পরস্পর সমান। (২০১৮)

উত্তর: **স্থিতি কোণ:** অনুভূমিকের সাথে কোন বল যে কোণ উৎপন্ন করলে আনত তলের উপরস্থ কোন বস্তু গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয় সেই কোণকে ঐ তলে বস্তুটির স্থিতি বা নিশ্চল কোণ বলে।



A ব্লকটি OY আনত তলের উপর বসানো আছে। ব্লকের ওজন W এবং ঘর্ষণ বল f_S।

এখন OX তলের আনতি বাড়াতে বাড়াতে যখন আনতি θ হয় তখন A ব্লকটি গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয়। এই সীমান্তিক অবস্থায় আমরা লিখতে পারি,

$R = W\cos\theta, \quad f_S = W\sin\theta$

$\therefore$ ঘর্ষণাঙ্ক $\mu_s = \frac{f_s}{R} = \frac{W\sin\theta}{W\cos\theta} = \tan\theta$

$\Rightarrow \mu_s = \tan\theta$

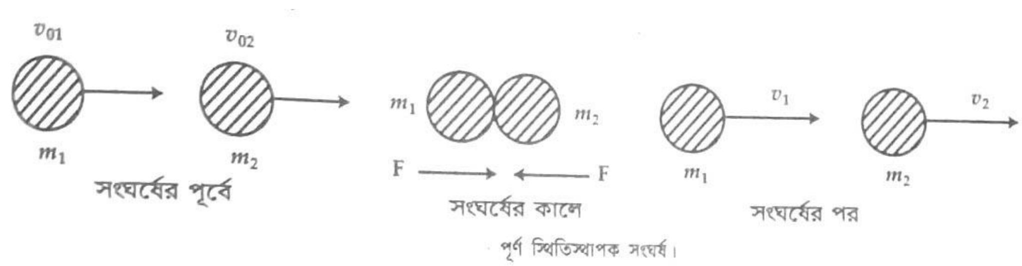
এখন θ হচ্ছে OX তলের A ক্রমের স্থিতিকোণ

$\Rightarrow \tan\lambda = \tan\theta$

$\Rightarrow \theta = \lambda$ (প্রমাণিত) $[\mu_s = \tan\lambda]$

প্রশ্ন-২২: দেখাও যে, সমান ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক একমাত্রিক সংঘর্ষ হলে, এরা একে অপরকে বেগ বিনিময় করে। (২০১৩)

উত্তর:



মনে করি m_1ও m_2 ভরের দুইটি বস্তু একই সরলরেখা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে v_{01} ও v_{02} বেগে গতিশীল। $v_{01} > v_{02}$ হওয়ায় এদের মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

সংঘর্ষের পূর্বের মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের মোট ভরবেগ,

$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$

$m_1 (v_{01} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{02})$ ………………… (1)

যেহেতু সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাজেই সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তির সমষ্টি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তির সমষ্টির সমান হয়।

$\frac{1}{2} m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2$

$$\frac{1}{2}\ m_1 (v_{01}^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_{02}^2) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$\frac{1}{2}\ m_1 (v_{01} + v_1)(v_{01} - v_1) = \frac{1}{2} m_2 (v_2 + v_{02})(v_2 - v_{02}) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (3)$$

সমীকরণ (2) কে সমীকরণ (1) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

$$v_{01} + v_1 = v_2 + v_{02}$$

$$v_2 = v_{01} + v_1 - v_{02}$$

(1) নং সমীকরণে v_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02}$$

(1)নং সমীকরণে v_1 এর মান বসিয়ে পাই,

$$V_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{02} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{01}$$

বস্তু দুটির ভর সমান অর্থাৎ $m_1 = m_2$ হলে, সমীকরণ (3) ও (4) থেকে পাই, $v_{01} = v_2$ এবং $v_{02} = v_1$ অর্থাৎ সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি বেগ বিনিময় করে।

প্রশ্ন-২৩: দেখাও যে, $\vec{F} = \sum m\vec{a}$, এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। (২০১৩)

উত্তর: ধরা যাক, কোন বস্তুর ভর m, বেগ $\vec{v}$ এবং ভরবেগ $\vec{P}$ । এর উপর $\vec{F}$ বল প্রযুক্ত হলে এর ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। নিউটনের ২য় সূত্রানুযায়ী

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}(\vec{v}) = F$$

$$\Rightarrow m\vec{a} \propto \vec{F} \ \ \Rightarrow m\vec{a} = k\vec{F} \ \ldots\ldots\ldots.(i)$$

এখন কোন বস্তুর উপর একাধিক বল প্রযুক্ত হলে নিট বল হবে,

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

সেক্ষেত্রে (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

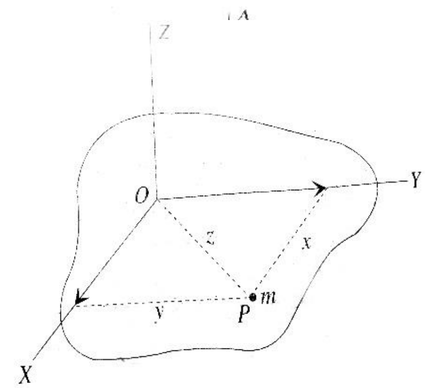
$$\sum\overleftarrow{F} = m\overleftarrow{a}$$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-২৪: ১টি অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১২, ২০১৮)

অথবা, দেখাও যে, দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক তার গতিশক্তির দ্বিগুণ।

উত্তরঃ মনে করি, M ভরের ১টি দৃঢ় বস্তু XY অক্ষর চারিদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। ধরি M ভরের বস্তুটি m_1, m_2, m_3.......... ইত্যাদি অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি এবং XY অক্ষ থেকে এদের লম্ব দূরত্ব r_1, r_2, r_3.....

যেহেতু বস্তুকণাগুলো জড়বস্তুর সাথে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ তাই প্রত্যেকের কৌণিক বেগ ω।



$\therefore$ m_1 ভরের বস্তুকণার রৈখিক বেগ $v_1 = \omega r_1$

$\therefore$ গতিশক্তি, $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$

অনুরূপভাবে, $E_1 = \frac{1}{2} m_1 r_2^2 \omega_2$

$\therefore$ সমস্ত বস্তুর গতিশক্তি,

$$E = E_1 + E_2 + E_3 ....$$

$$= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 ....$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 ....]$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 (\sum m_i r_i^2)$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [\because \sum m_i r_i^2 = I]$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$\Rightarrow 2E = I$ (ω=1 হলে) (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-২৫: জড়তার ভ্রামক এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে? (২০১২, ২০১৮ ,২০২৪)

উত্তরঃ জড়তার ভ্রামকঃ কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে কোন দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেকটি কণার লম্ব দূরত্বের বর্গ এবং এদের প্রত্যেকের ভরের গুণফলের সমষ্টিকে ঐ সরলরেখার সাপেক্ষে বস্তুর জড়তার ভ্রামক বলে।

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...\sum m_i r_i^2$$

চক্রগতির ব্যাসার্ধঃ কোন দৃঢ় বস্তুর সমগ্র ভর যদি ১টি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রভূত করা যায় যাতে করে ১টি নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে ঐ কেন্দ্রীভূত বস্তুকণার জড়তার ভ্রামক,

ঐ নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামকের সমান হয়। তাহলে ঐ নিদিষ্ট অক্ষ থেকে কেন্দ্রীভূত বস্তুকণার লম্ব দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলে।

প্রশ্ন-২৬: জড়তার ভ্রামক সম্পর্কিত লম্ব অক্ষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং প্রমাণ করুন।। (২০১০)

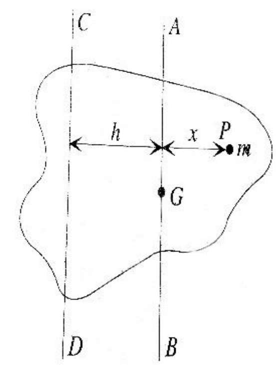
উত্তরঃ **লম্ব উপপাদ্যঃ** কোন সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে ঐ পাতের জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি হবে-

ঐ দুই অক্ষের ছেদবিন্দু দিয়ে এবং পাতের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান।

<u>**ব্যাখ্যা**</u>: কোন সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX ও OY এর সাপেক্ষে যদি জড়তার ভ্রামক I_x ও I_y হয় তবে তাদের সমষ্টি (I_x+I_y) হবে–

ঐ দুই অক্ষের ছেদবিন্দু O দিয়ে এবং পাতের তলের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষ OZ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক I_z এর সমান

$\therefore I_z = I_x + I_y$



প্রমাণ:

OX, OY O বিন্দুতে ছেদ করে। OZ অক্ষটি সমতল পাতের উপর লম্ব। মনে করি, এই পাতের উপর অবস্থিত P বিন্দুতে ১টি কণার ভর m। এখন OY, OX, OZ অক্ষ থেকে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে x, y, z।

$\therefore z^2 = x^2 + y^2$

এখন পাত্রটি অসংখ্য কণার সমন্বয়ে গঠিত হলে যেমন $m_1, m_2, m_3.....$।

এবং OY অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্ব $x_1, x_2......... x_i$

একইভাবে OX অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্ব $y_1, y_2.........y_i$

OZ অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্ব $z_1, z_2.........z_i$ হলে OZ অক্ষের সাপেক্ষে পাত্রটির জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \sum m_i z_i^2$$

$$= I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= I_z = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

$= I_z = I_x + I_y$ [$\sum m_i x_i^2 = OY$ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক

$\sum m_i y_i^2 = OX$ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক]

$\therefore I_z = I_x + I_y$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-২৭: জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত সমান্তরাল অক্ষ উপাদ্য ব্যাখ্যা এব প্রমাণ করুন। (২০১৭)

উত্তর: **উপপাদ্য:** যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে কোন বস্তুর জড়তার ভ্রামক হবে–

- ঐ অক্ষের সমান্তরাল ও বস্তুর ভরকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক I_G
- ঐ বস্তুর ভর ও দুই অক্ষের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বের (h) বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

<u>**ব্যাখ্যা**</u>: মনে করি, M ভরের কোন বস্তুর ভরকেন্দ্র G এর মধ্য দিয়ে অতিক্রান্ত AB অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক I_G। তাহলে এই অক্ষ হতে h দূরত্বে এবং এই অক্ষের সমান্তরাল কোন অক্ষ CD এর সাপেক্ষে ঐ বস্তু জড়তার ভ্রামক হবে $I = I_G + Mh^2$

প্রমাণ: ধরা যাক, P বিন্দুতে অবস্থিত ১টি কণার ভর m

AB অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব ঐ কণার= x

CD অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব ঐ কণার = $h+x$

এখন কণাটি অসংখ্য ভরের কণার সমষ্টি $m_1, m_2, m_3.......$হলে

AB অক্ষ থেকে ঐ কণাগুলোর লম্ব দূরত্ব= $x_1, x_2, x_3..........$

CD অক্ষ থেকে ঐ কণাগুলোর লম্ব দূরত্ব= $(h+x_1), (h+x_2), (h+x_i)........$

এখন CD অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক

$I = \Sigma m_i (x_i + h)^2$ | $\sum m_i x_i^2 = I_G$ ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ AB এর সাপেক্ষে

$= \Sigma mi(x_i^2 + 2x_i h + h^2)$

$= \sum m_i x_1^2 + \sum 2hx_i m_i + \sum m_i h^2$

$\sum m_i x_i = 0$ AB অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির ভর ভ্রামক

$\sum m_i = M$ বস্তুটির সমগ্র ভর

$=I_G+2h\times0+h^2M$

$\therefore I= I_G+Mh^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-২৮: একটি বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১০)

উত্তর:

- ধরি, BCD একটি বৃত্তাকার চাকতি। এর ভরকেন্দ্র O এবং পৃষ্ঠের সাথে লম্বভাবে গমনকারী PQ অক্ষের সাপেক্ষে ঐ চাকতির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে।
- ধরা যাক, চাকটিতির ভর M, ব্যাসার্ধ r তাহলে ক্ষেত্রফল $A=\pi r^2$

$\therefore$ চাকতির প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ভর, $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi r^2}$ ....(i)

এখন অক্ষ থেকে x দূরত্বে dx প্রস্থের একটি সরু বলয় কল্পনা করা যাক।

এই বলয়ের ক্ষেত্রফল dA= বলয়ের পরিধি $\times$ প্রস্থ

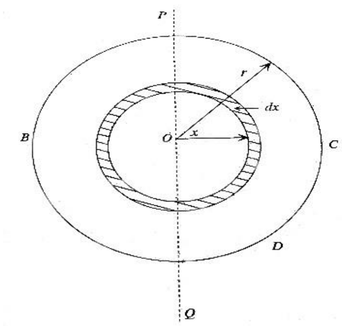
$\Rightarrow dA = 2\pi\ x \times dx$

সুতরাং ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ভর

$dm = \sigma dA$

$\Rightarrow dm = \frac{M}{\pi r^2} 2\pi x\, dx$

$\Rightarrow dm = \frac{2M}{r^2} x\, dx$



এখন PQ অক্ষের সাপেক্ষে এই dx প্রস্থের সরু বলয়ের জড়তার ভ্রামক

$dI = x^2\, dm$

$= x^2 \frac{2M}{r^2} x\, dx$

$= \frac{2M}{r^2} x^3 dx$

এখন x=0 থেকে x=r সীমার মধ্যে সমাকলণ করে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক পাওয়া যায়–

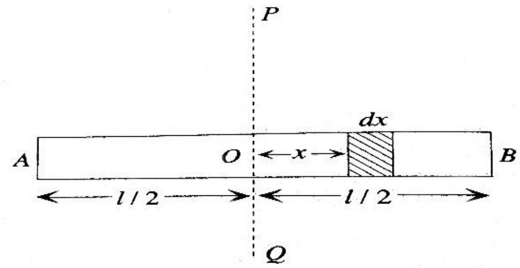
$$I = \frac{2M}{r^2} \int_0^r x^3 dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{2M}{4r^2} \left[x^4\right]_0^r$$

$$\Rightarrow I = \frac{2M}{4r^2} \left(r^4 - 0\right)$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}Mr^2$$

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ I=Mk^2 হলে



$$Mk^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

$$k = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

প্রশ্ন-২৯: নিজ অক্ষের সাপেক্ষে একটি নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। (২০১১)

উত্তর: ধরা যাক, C একটি নিরেট সিলিন্ডার। এর নিজ অক্ষ PQ এর সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক নির্ণ করতে হবে।

আয়তন $v = \pi r^2 \ell$

প্রতি একক আয়তনে ভর তথা ঘনত্ব= $\frac{M}{\pi r^2 \ell}$

PQ অক্ষের চারিদিকে x ব্যাসার্ধের এবং dx পুরুত্বের একটি ফাঁপা চোঙ বিবেচনা করা যাক।

এর ক্ষেত্রফল dA= পরিধি × পুরত্ব

$= 2\pi x \times dx$

আয়তন dv = ক্ষেত্রফল × দৈর্ঘ্য

$= 2\pi x\, dx \times \ell$

$\therefore$ ভর dm = আয়তন × ঘনত্ব

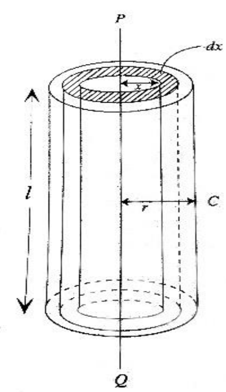
$= 2\pi x\, dx\, \ell \times \frac{M}{\pi r^2 \ell}$

$= \frac{2M}{r^2} x\, dx$

এখন জড়তার ভ্রামক dI = x^2 dm

$= \frac{2m}{r^2} x^3 dx$

সমাকরল করে $I = \frac{2m}{r^2}\int_0^r x^3 dx = \frac{1}{2}Mr^2$ [similarly আগের Qns]



প্রশ্ন-৩০: ১টি সরু ও সুষম দন্ডের দৈর্ঘ্যে মধ্য দিয়ে এবং দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

উত্তর: AB ১টি সুষম দন্ড। O মধ্যবিন্দু। লম্বভাবে গমনকারী PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, দণ্ডের দৈর্ঘ্য ℓ, ভর M হলে

দণ্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\lambda = \frac{M}{\ell}$

অক্ষ থেকে x দূরত্বে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ভর dm = λdx

$$\Rightarrow \; dm = \frac{M}{\ell} dx$$

এখন জড়তার ভ্রামক dI = x^2 dm

$$\Rightarrow \; dI = \frac{\text{M}}{\ell} x^2 dx$$

সমাকরণ করে $x = -\frac{\ell}{2}$ থেকে $x = \frac{\ell}{2}$ সীমার মধ্যে

$$I = \frac{M}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \, dx$$

$$= \frac{M}{3\ell} \left[x^3\right]_{-\ell/2}^{\ell/2}$$

$$= \frac{M}{3\ell} \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^3\right]$$

$$\therefore \; I = \frac{M\ell^2}{12}$$

প্রশ্ন-৩১: একটি সরু ও সুষম দন্ডের এক প্রান্ত দিয়ে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করুন।

উত্তর:

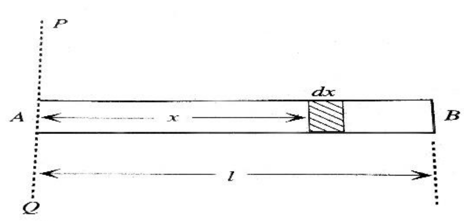
AB একটি সুষম দন্ড। এক প্রান্ত দিয়ে লম্বভাবে গমনকারী PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, দণ্ডের দৈর্ঘ্য, ℓ, ভর M হলে

দণ্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\lambda = \frac{M}{\ell}$

অক্ষ থেকে x দূরত্বে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশের ভর dm = λdx

$$\Rightarrow \; dm = \frac{M}{\ell} dx$$



এখন জড়তার ভ্রামক dI = x^2 dm

$$\Rightarrow \; dI = \frac{\text{M}}{\ell} x^2 dx$$

সমাকলন করে x=0 থেকে x=ℓ সীমার ভিতর

$$I = \frac{M}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx$$

[সমাকলন করে]

$$I = \frac{M\ell^2}{3}$$

প্রশ্ন-৩২: টর্ক কাকে বলে? টর্ক ও কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন। $\tau = I\alpha$ (২০১৭)

উত্তর: টর্ক: ঘূর্ণায়মান কোন কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং কণার উপর প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

ধরা যাক, কোন ১টি দৃঢ় বস্তুর উপর F বল প্রয়োগ করলে বস্তুটি কোন অক্ষের সাপেক্ষে α সমকৌণিক ত্বরণে ঘূর্ণায়মান।

কণার ভর m_1 লম্ব দূরত্ব r_1 ত্বরণ α_1 হলে

টর্ক বা বলের ভ্রামক = $Fr_1 \Rightarrow m_1 a_1 r_1 \Rightarrow m_1 \alpha\, r_1^2 \Rightarrow m_1 r^2 \alpha$

একইভাবে m_2 এর জন্য $\tau = m_2 r_2^2 \alpha$

$\therefore \ \tau = \alpha\, m_1 r_1^2 + \alpha\, m_2 r_2^2 + \alpha\, m_3 r_3^2$

$= \alpha \sum m_i r_i^2$

$= I\alpha$ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক ত্বরণ (**প্রমাণিত**)।

প্রশ্ন-৩৩: কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে? কৌণিক ভরবেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক $L = I_\omega$ প্রমাণ করুন।

উত্তর: কৌণিক ভরবেগ: ঘূর্ণায়মান কোন কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{P}$

ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ

$L = m_1 v_1 r_1$

$= m_1 r_1^2 \omega$

একইভাবে $L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega \ldots\ldots$

$\Rightarrow \ L = \omega \sum m_i r_i^2$

$\Rightarrow$ L= $I\omega$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-৩৪: কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র লিখুন। (২০০৯)

উত্তর: সূত্র: কোন কণার উপর প্রযুক্ত নিট টর্ক শূন্য হলে কণাটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

প্রতিপাদন:

আমরা জানি,

কৌণিক ভরবেগ $\ell = I\omega$

একক সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে আমরা পাই-

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

$$= I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

কিন্তু প্রযুক্ত টর্ক τ হলে

$\tau = I\alpha$ ....(ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে

$$\frac{d\ell}{dt} = \tau$$

এখন $\tau = 0$ হলে $\frac{d\ell}{dt} = 0$

বা, ℓ= ধ্রুবক

সুতরাং প্রযুক্ত টর্ক শূন্য হলে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক থাকে।

প্রশ্ন-৩৫: প্রমাণ কর যে, কোনো কণিকার কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর প্রযুক্ত টর্কের সমান। (২০০৯, ২০১১)

উত্তর: আমরা জানি,

$$\tau = I\alpha$$

$$= I\frac{d\omega}{dt}$$

$$= I = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

$$= \frac{dL}{dt} \quad [\because I\omega = L]$$

$\therefore$ টর্ক = কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার। (**প্রমাণিত**)

কাজ, ক্ষমতা শক্তি

Syllabus:

- Work and kinetic energy
- Conservative and non conservative force
- Work done by gravitational force
- Work done by spring force
- Work and potential energy
- Gravitational potential energy
- Work energy theorem
- Conservation of energy

বিগত সাল

১.শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লিখুন এবং সরলদোলকের ক্ষেত্রে তা প্রমাণ করুন। (২০১৯, ২০১৮, ২০১২)

২. ধ্রুব বলের ক্ষেত্রে কাজ শক্তি উপপাদ্য ব্যাখ্যা করুন। (২০১৮, ২০১৪)

৩. পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে শক্তির নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণ করুন। (২০১৭)

৪.সংরক্ষণশীল বল কি? পরিবর্তনশীল বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ বের করুন। (২০১৬, ২০১৩, ২০১১)

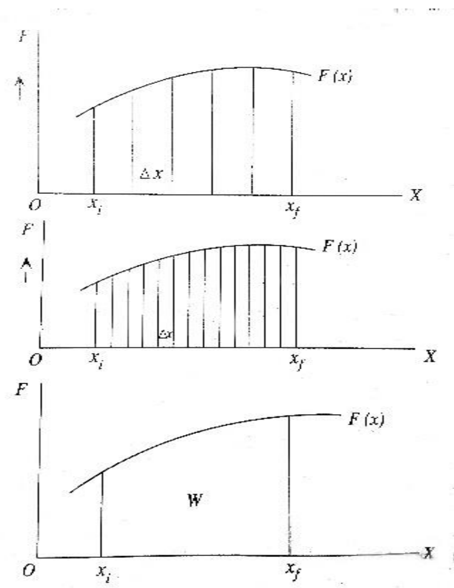
প্রশ্ন-৩৭: সংরক্ষণ বল কী? পরিবর্তনশীল বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ বের করুন। $\mathbf{W} = \int \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{ds}}$

(২০১১, ২০১৩, ২০১৬)

উত্তর: সংরক্ষণশীল বল: কোন কণা একটি পূর্ণ চক্র সম্পন্ন করে তার আদি অবস্থানে ফিরে আসলে কণাটির উপর যে বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হয়, সেই বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

যেমন- অভিকর্ষ বল।

ধরি, কোন বস্তুর উপর বল F, X অক্ষ বরাবর ক্রিয়াশীল। বলটির মান বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং F হচ্ছে F(x)। x এর বিভিন্ন মানের জন্য F(x) দেখানো হয়েছে (চিত্র-ক)



বস্তুটির আদি অবস্থান x_i এবং শেষ অবস্থান x_f। আদি অবস্থান হতে শেষ অবস্থানে যেতে কৃত কাজের পরিমাণ হিসাব করব।

এখন মোট সরণকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র Δx প্রস্থের N সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করি।

১ম ক্ষেত্রে সরণ হচ্ছে x_i থেকে $x_i+\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ হচ্ছে Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে বল অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং এই অংশকে কাজের পরিমাণ

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x$$

অনুরূপভাবে ২য় অংশে $x_i + \Delta x$ থেকে $x_i+2\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ Δx

$\therefore$ কাজের পরিমাণ $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$

$\therefore$ বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরতে F(x) বল দ্বারা কৃত মোট কাজ

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 .... \Delta W_N$$

$$\Rightarrow W = F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x ....F_n\Delta x$$

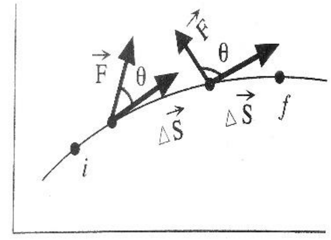
$$W = \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

এখন কৃত কাজের সঠিক মাপ পেতে Δx কে শূন্য এবং N কে অসীম ধরে

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{N} Fx\Delta x$$

কিন্তু $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{N} Fx\Delta x$ রাশিটি ক্যালকুলাসের ভাষায় $\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$

$$\therefore W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \text{...............(i)}$$



পরবর্তী বল দ্বারা কৃত কাজ দ্বিমাত্রিক ঘটনার ক্ষেত্রে কাজ হিসাব করার জন্য কণাটির গতিপথ বিপুল সংখ্যক ক্ষুদ্র সরণ $\Delta\vec{s}$ এ বিভক্ত করি।

উপরের চিত্রে প্রতিটি অবস্থান বল $\vec{F}$ এবং $\vec{F}$ ও $\overrightarrow{\Delta s}$ এর অন্তর্ভূক্ত কোণ θ। $\overrightarrow{\Delta s}$

সরণকালে কণার উপর F বল দ্বারা কৃত কাজের পরিমান

$$\Delta W = \vec{F}.\Delta\vec{s}$$

এখানে $\vec{F}$ ও $\overrightarrow{\Delta s}$ এর দিক একই। সুতরাং i থেকে f পর্যন্ত যেতে মোট কৃতকাজের পরিমাণ

$$W = \sum \Delta W$$

$$\Rightarrow W = \sum \vec{F}.\Delta\vec{s}$$

$$\Rightarrow W = F\Delta s \cos\theta$$

যদি $\overrightarrow{\Delta s}$ গুলো যদি ক্ষুদ্রাদিক্ষুদ্র হয় তাহলে

$$W = \int dW = \int_i^f \vec{F}.d\vec{s}$$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-৩৮: স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজের হিসাব বের করুন।

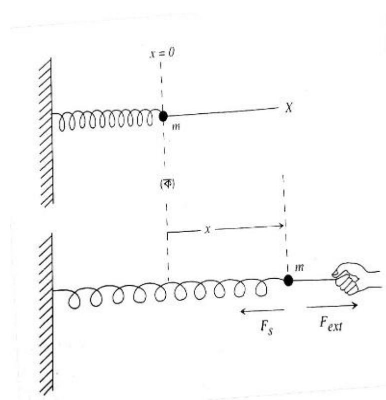
উত্তরঃ

চিত্রে ১টি স্প্রিং দেখানো আছে যার এক প্রান্তে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ এবং অপর প্রান্ত m ভরের কণার সাথে সংযুক্ত। কণাটি যখন তার আদি অবস্থান x_i থেকে শেষ অবস্থান x_f এ যায় তখন কণাটির উপর স্প্রিং দ্বারা কৃত কাজ

$$Ws = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x)dx \text{ ....(i)}$$

এখন প্রযুক্ত বল Fs, কণাটির সরণ x এর সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী

$\therefore$ Fs= – kx



(i) নং সমীকরণ থেকে $Ws = \int_{x_i}^{x_f} -kx\, dx$

$$= -k\int_{x_i}^{x_f} x\, dx$$

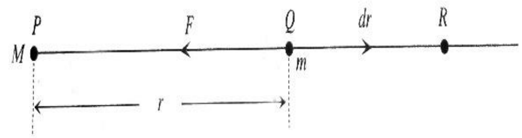
$$= -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{1}{2}k\left[x_f^2 - x_i^2\right]$$

$$\therefore Ws = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

প্রশ্ন-৩৮: মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজের হিসাব করুন।

উত্তরঃ



ধরি, কোন স্থানে P বিন্দুতে M ভরের একটি বস্তু অবস্থিত। P থেকে r দূরত্বে Q বিন্দুতে m ভরের আরেকটি বস্তু অবস্থিত। সুতরাং মহাকর্ষ সূত্রানুসারে তাদের মধ্যকার আকর্ষণ বল-

$F = G\frac{Mm}{r^2}$ (বল QP বরাবর ক্রিয়াশীল)

এখন m ভরের বস্তুকে Q থেকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরিয়ে R বিন্দুতে নিতে মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ

$$dW = Fdr\cos 180^0$$
$$= -Fdr$$

যদি বস্তুটির আদি দূরত্ব r_a এবং শেষ দূরত্ব r_b হয় তাহলে কাজ-

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} -Fdr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2}dr$$

$$= -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -GMm\int_{r_a}^{r_b} r^{-2}dr$$

$$= -GMm\left[-r^{-1}\right]_{r_a}^{r_b}$$

$$= GMm\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right]$$

প্রশ্ন-৩৯: শক্তি, যান্ত্রিক শক্তি, গতিশক্তি কাকে বলে। প্রমাণ কর যে, $\mathbf{W = \frac{1}{2}mv^2}$

অথবা, গতিশক্তি ও ভরবেগের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন।

উত্তর: শক্তি: কোন বস্তুর কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তি: কোন বস্তুর মধ্যে তার গতি, অবস্থান বা ভৌত অবস্থার জন্য কাজ করার যে সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে তাকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তির দুটি রূপ→ গতিশক্তি, বিভব শক্তি

গতিশক্তি: কোন গতিশীল বস্তু গতিশীল থাকার জন্য কাজ করার যে শক্তি অর্জন করে তাকে গতিশক্তি বলে।

প্রমাণ: m ভরের স্থির বস্তুর উপর F প্রয়োগ করলে X অক্ষ বরাবর সরণ ঘটলে এবং বেগ 0→V তে উন্নীত হলে কৃত কাজ-

$$W = \int_{v=0}^{v=v} Fdx$$

$$\Rightarrow W = \int_{v=0}^{v=v} ma\,dx$$

F=ma

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

$$\Rightarrow W = \int_{v=0}^{v=v} mv \frac{dv}{dx} dx$$

$$\Rightarrow W = \int_{0}^{v} mv\, dv$$

$$\Rightarrow W = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$$

$\therefore\ W = \frac{1}{2}mv^2$ (প্রমাণিত) ....(i)

কিন্তু সংজ্ঞানুসারে এই কৃত কাজই হচ্ছে বস্তুটির গতিশক্তি k.

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক:

(i) নং সমীকরণ থেকে $\Rightarrow\ k = \frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

$\therefore\ k = \frac{p^2}{2m}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৪০: ধ্রুব বলের জন্য কাজ শক্তি উপপাদ্য ব্যাখ্যা করুন।(২০১৪, ২০১৮, ২০২৩)

অথবা, পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজের পরিমাণ ব্যাখ্যা করুন।

উত্তর: **বিবৃতি:** কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃত কাজ বস্তুটির গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান।

ধ্রুব বলের জন্য: v বেগে গতিশীল m ভরের কোন বস্তুর উপর F বল ক্রিয়া করলে X সরণে বস্তুর শেষ বেগ v হলে, কৃত কাজ

W = Fx

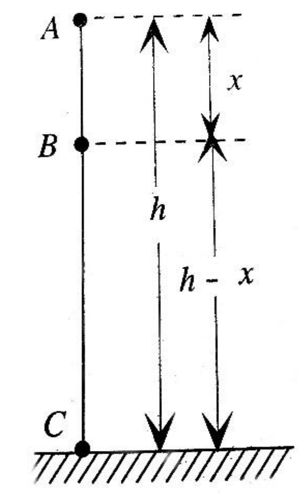
$\Rightarrow$ W=max

$$\Rightarrow W = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right) \qquad \left[\because v^2 = v_0^2 + 2ax\right]$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow W = k - k_0 = \Delta k$$

$\therefore$ কৃত কাজ = বস্তুটির গতিশক্তির পরিবর্তন



<u>পরিবর্তনশীল বলের জন্য</u>: F বল প্রয়োগে কণাটি x_0 অবস্থান থেকে x অবস্থানে সরাতে প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃত কাজ-

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} ma\, dx = \int_{x_0}^{x} mv\frac{dv}{dx}dx$$

$$= \int_{v_0}^{v} mv\, dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = k - k_0 = \Delta k$$

প্রশ্ন-৪১: বিভব শক্তি বা স্থিতি শক্তি কাকে বলে। শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা নীতি লিখুন।(২০১২, ২০১৮, ২০১৯)

উত্তরঃ

বিভব শক্তিঃ

স্বাভাবিক অবস্থা বা অবস্থান পরিবর্তন করে কোন বস্তুকে অন্য কোন অবস্থায় আনলে বস্তু কাজ করার যে সামর্থ্য অর্জন করে তাকে বিভব শক্তি বলে।

শক্তির নিত্যতাঃ

শক্তির সৃষ্টি বা বিনাশ নেই, শক্তি কেবল এর রূপ থেকে অপর এক বা একাধিক রূপে পরিবর্তিত হতে পারে। মহাবিশ্বের মোট শক্তির পরিমাণ নির্দিষ্ট ও অপরিবর্তনীয়।

প্রশ্ন-৪২: যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা লিখ। অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা ব্যাখ্যা বা প্রমাণ করুন। (২০১৭)

উত্তরঃ

বিবৃতিঃ কোন ব্যবস্থায় কেবল সংরক্ষণশীল বল ক্রিয়া করলে ব্যবস্থার গতিশক্তি ও বিভব শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে।

অর্থাৎ

গতিশক্তি + বিভব শক্তি = ধ্রুবক

অর্থাৎ $U_i + K_i = U_f + K_f$

প্রমাণ: ধরা যাক, m ভরের কোন বস্তুকে ভূমি থেকে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে h উচ্চতায় উঠিয়ে A বিন্দুতে স্থির অবস্থায় রাখা হল। A অবস্থানে সমস্ত শক্তিই বিভব শক্তি।

এখন বস্তুটিকে যদি অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়তে দেয়া হয় তাহলে বস্তুর বিভব শক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে

A বিন্দুতে বিভব শক্তি, $U_A = mgh$

A বিন্দুতে বিভব গতিশক্তি, $K_A = 0$

A বিন্দুতে বিভব মোট শক্তি, $E_A = U_A + K_A = mgh$

এখন বস্তুটি অভিকর্ষের প্রভাবে A বিন্দু থেকে x দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে আসলে B বিন্দুতে বিভ ও গতিশক্তি উভয় থাকে।

$\therefore$ B বিন্দুতে বিভব শক্তি, $u_B = mg\,(h-x)$

B বিন্দুতে বিভব গতিশক্তি, $k_B = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m2gx = mgx$

B বিন্দুতে বিভব মোটশক্তি, $E_A = mgh-mgx+mgx$

$= mgh$ = A বিন্দুতে মোট শক্তি

$\therefore$ B বিন্দুতে মোট শক্তি = A বিন্দুতে মোট শক্তি

ইহাই যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা।

প্রশ্ন-৪৩: সরল দোলকের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা ব্যাখ্যা করুন। (২০১৯, ২০১৮, ২০১২)

উত্তর:

ধরা যাক, OA একটি দোলক। B দোলকের সর্বাধিক সরণের অবস্থান। অর্থাৎ B বিন্দুতে দোলকটি মুহূর্তের জন্য থেমে যায়। B বিন্দুতে দোলকের শক্তি সম্পূর্ন স্থিতি শক্তি এবং A থেকে B পর্যন্ত যাওয়া মানে খাড়া ভাবে A থেকে N পর্যন্ত যাওয়া।

$\therefore$ B বিন্দুতে স্থিতিশক্তি = $mg\times AN$

B বিন্দুতে গতিশক্তি = 0

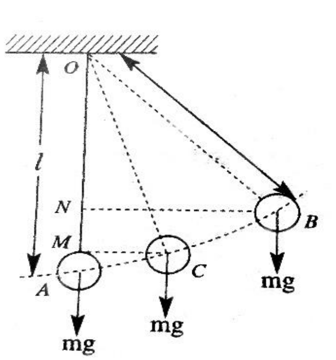
B বিন্দুতে মোটশক্তি = $mg\times AN$

এখন কোন এক সময় C বিন্দুতে পৌছালে

C বিন্দুতে স্থিতিশক্তি = $mg \times AM$

C বিন্দুতে গতিশক্তি = $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh = mgNM$

$= mg\,(AN - AM)$



$\therefore$ C বিন্দুতে মোটশক্তি = $mgAM + mgAN - mgAM$

$= mg\,AN$

= B বিন্দুতে মোট শক্তি

অর্থাৎ B এবং C বিন্দুতে মোট শক্তির কোন পরিবর্তন নাই। এটাই যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা।

সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহ :

সমীকরণ

- $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$
- $\tan\theta=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$
- $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$
- $\hat{a}=\dfrac{\vec{A}}{A}=\dfrac{A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$
- $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$
- $\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$
- $C=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB\sin\theta$
- $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$

গাণিতিক সমস্যাবলি

প্রশ্ন-১: 20N এবং 60N মানের দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যকার কোণ 30^0। রাশি দুটির লব্ধির মান বের কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$
$$=(20N)^2+(60N)^2+2\times20N\times60N\times\cos30^0$$
$$=\left[400+3600+2\times20\times60\times0.866\right]N^2$$
$$\therefore\ R=\sqrt{6078.4}N$$
$$=77.96N$$

এখানে,
প্রথম রাশির মান, P=20N
দ্বিতীয় রাশির মান, Q= 60N
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha=30^0$
লব্ধির মান, R=?

উত্তর: 77.96N

সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহ:

সমীকরণ

- $v=v_0+at$
- $S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$
- $v^2=v_0^2+2as$
- $v=v_0-gt$
- $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

- $v^2 = v_0^2 - 2gh$

গাণিতিক সমস্যাবলি

প্রশ্ন-২: একটি গাড়ি সরলরেখা বরাবর চলে একটি বিন্দুকে $10ms^{-1}$ বেগে অতিক্রম করার পর $2ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে চলে। 5s পড়ে গাড়িটির বেগ কত হবে? এই সময়ে গাড়িটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$$v = v_0 + at$$

$$= 10ms^{-1} + 2ms^{-2} \times 5s$$

$$= 20ms^{-1}$$

আবার,

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 10ms^{-1} \times 5s + \frac{1}{2} \times 2ms^{-2} \times (5s)^2$$

$$= 50m + 25m = 75m$$

এখানে,

আদি বেগ, $v_0 = 10ms^{-1}$

ত্বরণ, $a = 2ms^{-2}$

সময়, $t = 5s$

শেষ বেগ, $v = ?$

দূরত্ব, $s = ?$

উত্তর: $20ms^{-1}; 75m$

প্রশ্ন-৩: স্থির অবস্থা হতে যাত্রা আরম্ভ করে একটি বস্তু প্রথম সেকেন্ডে 2m দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 1m দূরত্ব অতিক্রম করতে বস্তুটির কত সময় লাগবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2$$

বা, $2m = 0 + \frac{1}{2}a \times (1s)^2$

$\therefore\ a = 4ms^{-2}$

এখানে

আদি বেগ, $V_0 = 0$

সময়, $t_1 = 1s$

দূরত্ব, $s_1 = 2m$

ত্বরণ, $a = ?$

ধরা যাক, প্রথম থেকে মোট s=3m দূরত্ব অতিক্রম করতে t সময় লাগে।

$\therefore\ s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ বা, $3m = 0 + \frac{1}{2} \times 4ms^{-2} \times t^2$

বা, $t^2 = \frac{3}{2}s^2$ বা, $t = \sqrt{\frac{3}{2}}s = 1.23s$

অতএব, শেষের 1m দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগে

$$t_2 = t - t_1 = 1.23s - 1s$$

$$= 0.23s$$

উত্তর: 0.23s

প্রশ্ন-৪: একটি ট্রেন $3\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলছে এবং আদি বেগ $10\ ms^{-1}$। ট্রেনটি যখন 60 m পথ অতিক্রম করবে তখন এর বেগ কত হবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

এখানে,

$$= (10ms^{-1})^2 + 2 \times 3ms^{-2} \times 60m$$

$$= 460m^2s^{-1}$$

$$\therefore\ v = 21.45ms^{-1}$$

ত্বরণ, $a = 3ms^{-2}$

আদি বেগ, $v_0 = 10ms^{-1}$

সরণ, $s = 60m$

শেষ বেগ, $v = ?$

উত্তর: $21.45ms^{-1}$

প্রশ্ন-৫: 50 kg ভরের এক ব্যক্তি 950 kg ভরের একটি গাড়ি স্থির অবস্থান থেকে 10s সমত্বরণে চালাল। অতঃপর 10 min সমবেগে চালানোর পর ব্রেক চেপে 5s সময়ের মধ্যে গাড়ি থামাল। যাত্রা শুরুর s পর গাড়ির বেগ $4ms^{-1}$ হলে গাড়ি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব কত?

সমাধান:

স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরুর পর যে ত্বরণে চলে গাড়িটি 2s এ $4ms^{-1}$ বেগ অর্জন করে সেই ত্বরণে প্রথম 0 s চলে। এই ত্বরণ a হলে,

$$v = v_0 + at$$

$$4ms^{-1} = 0 + a \times 2s$$

$$\therefore\ a = 2ms^{-2}$$

এখানে,

আদি বেগ, $V_0 = 0$

সময়, $t = 2s$

শেষ বেগ, $v = 4ms^{-1}$

ত্বরণ, $a = ?$

প্রশ্ন-৬: একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে $10ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময় একটি গাড়ি $100ms^{-1}$ বেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলবে? সমাধান:

ধরি ট্রেনটি t সময় পরে s দূরত্ব অতিক্রম করে গাড়িটিকে পেছনে ফেলবে।

ট্রেনের ক্ষেত্রে,

$$s = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2$$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2} \times 10ms^{-2}t^2$

বা, $s = (5ms^{-2})t^2$ ....(1)

এখানে,

ট্রেনের আদিবেগ, $v_0t = 0$

ট্রেনের ত্বরণ, $a_1 = 10ms^{-2}$

গাড়ির আদিবেগ, $v_{02} = 100ms^{-1}$

গাড়ির ত্বরণ, $a_2 = 0$

গাড়ির ক্ষেত্রে,

$$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

বা, $s = (100ms^{-1})t + 0$ ....(2)

(1) এবং (2) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$(5ms^{-2})t^2 = (100ms^{-1})t$$

বা, $t = 20s$

উত্তর: 20s

প্রশ্ন-৭ঃ ঘণ্টায় 108 কিলোমিটার বেগে চলমান একটি গাড়ির চালক 100 m দূরে একটি ছোট ছেলেকে দেখতে পেলেন। সাথে সাথে ব্রেক চেপে দেওয়ায় ছেলেটির 10 m সামনে গাড়িটি থেমে গেল। গাড়িটির ত্বরণ কত এবং গাড়িটি থামতে কত সময় লেগেছে?

সমাধানঃ আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

$$= \frac{0-(30ms^{-1})^2}{2\times 90m}$$

$$= -5ms^{-2}$$

আবার,

$$v = v_0 + at$$

$$0 = 30ms^{-1} - 5ms^{-2}\times t$$

$$t = 6s$$

এখানে,

আদিবেগ, $v_0 = 100\ kmh^{-1} = \frac{108\times 10^3\ m}{3600\ s}$

$= 30ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v = 0$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, s = 100m − 10m

$= 90m$

ত্বরণ , $a = ?$

সময়, $t = ?$

উত্তরঃ $-5ms^{-2}; 6s$

প্রশ্ন-৮ঃ একটি লক্ষ্যস্থলে গুলি ছোঁড়া হল। 0.06m ভেদ করার পর গুলিটির বেগ অর্ধেক হয়ে গেল। গুলিটি আর কতদূর ভেদ করে যাবে?

সমাধানঃ আমরা জানি,

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a\,s_1$$

বা, $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s_1}$

$$= \frac{\frac{v_0^2}{4} - v_0^2}{2s_1} \quad = -\frac{3v_0^2}{8s_1}$$

ধরা যাক, ১ম ক্ষেত্রে

গুলির আদি বেগ, $V_0 = V_0$

প্রথম অংশে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_1 = 0.06m$

$0.06m$ যাওয়ার পর শেষ বেগ, $v_1 = \frac{v_0}{2}$

ত্বরণ, $a = ?$

এখন দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$v^2 = v_1^2 + 2as$$

$$O = \frac{v_0^2}{4} + 2\times\left(-\frac{2v_0^2}{8s_1}\right)s$$

বা, $\left(\frac{3v_0^2}{4s_1}\right)s = \frac{v_0^2}{4}$

$$\therefore\ s = \frac{s_1}{3}$$

$$= \frac{0.06m}{3}$$

২য় ক্ষেত্রে,

আদি বেগ, $V_1 = \frac{v_0}{2}$

ত্বরণ, $a = -\frac{3v_0^2}{8s_1}$

শেষ বেগ, v=0

অতিক্রান্ত দূরত্ব, s=?

$= 0.02m$

উত্তর: 0.02m

প্রশ্ন-৯: 9.8 ms^{-1} বেগে একটি পাথরকে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এটি কত সময় পর ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে? (g= 9.8ms^{-2})

সমাধান: ধরা যাক,

খাড়া ওপরের দিকে ধনাত্মক।

ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসলে একটি পাথরের অতিক্রান্ত দূরত্ব শূন্য হবে।

ধরা যাক, t সময় পরে পাথরটি ভূপৃষ্ঠে আসে।

আমরা জানি,

এখানে,

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = 0$

আদি বেগ, $v_0 = 9.8ms^{-1}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

সময়, $t = ?$

$$h = v_a t - \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $0 = (9.8ms^{-1})t - \left(\frac{1}{2}\times 9.8ms^{-2}\right)t^2$

বা, $(9.8ms^{-1} - 4.9ms^{-2}t)t = 0$ $\quad\because t \neq 0$

সুতরাং $(4.9ms^{-2})t = 9.8ms^{-1}$

$\therefore\ t = 2s$

উত্তর: $2s$

প্রশ্ন-১০: একজন লোক 48.0ms^{-1} বেগে একটি বল খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করে। বলটি কত সময় শূন্যে থাকবে এবং সর্বোচ্চ কত ওপরে ওঠবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

$$= \frac{2\times 48.0ms^{-1}}{9.8ms^{-2}}$$

$$= 9.8s$$

এখানে,

আদিবেগ, $v_0 = 48.0ms^{-1}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

উড্ডয়নকাল, $T = ?$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $y_{\max} = ?$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(48.0ms^{-1})^2}{2\times 9.8ms^{-2}}$$

$$= 117.55m$$

উত্তর: $9.8s; 117.55m$

প্রশ্ন-১১: দুটি ভারী বস্তু একই সাথে ওপর থেকে ফেলা হল। প্রথমটি 122.5m ওপর থেকে এবং দ্বিতীয়টি 200m ওপর থেকে। প্রথম বস্তু যখন ভূমিতে পৌছে তখন দ্বিতীয় বস্তুর উচ্চতা ও বেগ বের কর।

সমাধান: ধরা যাক, খাড়া ওপরের দিকে ধনাত্মক। এখানে প্রথম বস্তুর ভূমিতে পৌঁছতে যে সময় লাগবে তা নির্ণয় করে সেই সময়ে দ্বিতীয় বস্তুর উচ্চতা ও বেগ করতে হবে।

প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে নিম্নমুখী দূরত্বের জন্য,

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $-122.5m = 0 - \frac{1}{2} \times 9.8ms^{-2} \times t^2$

$\therefore\ t = 5s$

প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে,

আদিবেগ, $v_0 = 0$

দূরত্ব, $h = -122.5m$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

সময়, $t = ?$

ধরা যাক, দ্বিতীয় বস্তু এ সময় ভূমি থেকে x উচ্চতায় থাকে এবং এ সময় বেগ হয় v

দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $-(200m - x) = 0 - ½ \times 9.8\ ms^{-2} \times (5s)^2$

বা, $200m - x = 122.5m$

দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে,

আদিবেগ, $v_0 = 0$

সময়, $t = 5s$

শেষ বেগ, $v = ?$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = -(200m - x)$

$\therefore\ x = 77.5m$

এবং $v = v_0 - gt$

$= 0 - 9.8ms^{-2} \times 5s$

$= -49ms^{-1}$

ঋণাত্মক চিহ্ন নিম্নমুখী বেগ নির্দেশ করে।

উত্তরঃ উচ্চতা 77.5m, নিম্নমুখী বেগ $49ms^{-1}$

প্রশ্ন-১২ঃ 44.1 m গভীর একটি কূপে একটি পাথর নিক্ষিপ্ত হল। কূপের মধ্যে শব্দের বেগ $340ms^{-1}$ হলে পাথর নিক্ষেপের মুহূর্ত থেকে এটি পানিতে পতনের শব্দ শুনতে অতিক্রান্ত সময় বের কর।

সমাধানঃ ধরা যাক, খাড়া ওপরের দিক ধনাত্মক। মনে করি, পাথরটি পানিতে পড়তে সময় লাগে t_1 এবং পাথরটি পানিতে পড়ার শব্দ কূপের কিনারা পর্যন্ত পৌঁছতে সময় লাগে t_2।

আমরা জানি, পাথর পড়ার ক্ষেত্রে,

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

বা, $-44.1m = 0 - \frac{1}{2} \times 9.8ms^{-2} \times t_1^2$

$\therefore\ t_1 = 3s$

এখানে,

পাথরের আদিবেগ, $v_0 = 0$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

সময়, $t_1 = ?$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = -44.1m$

শব্দের ক্ষেত্রে, শব্দ সমবেগে চলে,

$$h = vt_2$$

$44.1m = (340ms^{-1}) \times t_2$

$\therefore\ t_2 = 0.13s$

এখানে,

শব্দের বেগ, $v = 340ms^{-1}$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = 44.1m$

শব্দ আসার সময়, $t_2 = ?$

$\therefore$ মোট সময়, $t = 3s + 0.13s$

$= 3.13s$

উত্তর: 3.13s

সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহ:

সমীকরণ

- $y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}x^2$
- $t_m = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$
- $h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$
- $T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$
- $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
- $R_m = \frac{v_0^2}{g}$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- $\omega = \frac{2\pi N}{t}$
- $v = \frac{2\pi\, r}{T}$
- $v = \omega\, r$
- $a = r\alpha$
- $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

[গাণিতিক সমস্যাবলি]

প্রশ্ন-১৩: একটি পাহাড়ের চূড়া থেকে একটি বল অনুভূমিকভাবে $40ms^{-1}$ দ্রুতিতে নিক্ষেপ করা হল। বাতাসের বাধা না থাকলে 3s পরে এর দ্রুতি কত হবে?

সমাধান: ধরা যাক, যে বিন্দু থেকে বলটি নিক্ষেপ করা হয় সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিকে Y অক্ষ ধনাত্মক।

আমরা জানি,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

কিন্তু $v_x = v_{x0} + a_x t$

$= 40ms^{-1} + 0$

এখানে,

আদি অনুভূমিক বেগ, $v_{x0} = 40ms^{-1}$।

আদি উল্লম্ব বেগ, $v_{y0} = 0$

$= 40ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y0} + a_y t$

$= 0 - 9.8ms^{-2} \times 3s$

$= -29.4ms^{-1}$

অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$

উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -9.8ms^{-2}$ [$\because$ নিম্নমুখী]

সময়, $t = 3s$

দ্রুতি, $v = ?$

$\therefore\ v = \sqrt{(40ms^{-1})^2 + (-29.4ms^{-1})^2}$

$= \sqrt{2494.36m^2s^{-2}}$

$= 49.64ms^{-1}$

উত্তর: $49.64ms^{-1}$

প্রশ্ন-১৪: একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30^0 কোণে $30ms^{-1}$ বেগে কিক করা হল। 1s পরে ফুটবলের বেগের মান কত?

সমাধান: ধরা যাক, যে বিন্দু থেকে ফুটবলটি কিক করা হয় সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিক Y-অক্ষ ধনাত্মক।

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে

v_x এবং v_y হলে,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে

v_{x0} এবং v_{y_0} হলে,

$v_x = v_{x0} + a_x t$

$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t$

এখানে,

নিক্ষেপ কোণ, $\theta_0 = 30^0$

আদি বেগ, $v_0 = 30ms^{-1}$

সময়, $t = 1s$

শেষ বেগ, $v = ?$।

অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$

উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -9.8ms^{-2}$ [$\because$ নিম্নমুখী]

$= (30ms^{-1})\cos 30^0 + 0$

$= 25.98ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t$

$= v_0 \sin\theta_0 + a_y t$

$= (30ms^{-1})\sin 30^0 - 9.8ms^{-2} \times 1s$

$= 15ms^{-1} - 9.8ms^{-1}$

$= 5.2ms^{-1}$

$\therefore\ v = \sqrt{(25.98ms^{-1})^2 + (5.2ms^{-1})^2}$

$= 26.5ms^{-1}$

উত্তর: $26.5\ ms^{-1}$

প্রশ্ন-১৫: অনুভূমিকের সাথে 30^0 কোণ করে ভূপৃষ্ঠ থেকে $50ms^{-1}$ বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হল। বুলেটটি 50m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে?

সমাধান: ধরা যাক, যে বিন্দু থেকে বুলেটটি নিক্ষেপ করা হয় সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিকে γ-অক্ষ ধনাত্মক।
আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2$$

$$= (\tan 30^0)\times 50m - \frac{9.8ms^{-2}}{2(50ms^{-1}\times\cos 30^0)^2}\times(50m)^2$$

$$= 22.33m$$

উত্তর: $22.33m$

এখানে,
$x_0 = y_0 = 0$
আদিবেগ, $v_0 = 50ms^{-1}$
নিক্ষেপ কোণ, $\theta_0 = 30^0$
অনুভূমিক দূরত্ব, $x = 50m$
উল্লম্ব দূরত্ব, $y = ?$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

প্রশ্ন-১৬: একটি বস্তুকে $40ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে 60^0 কোণে নিক্ষেপ করা হল। নির্ণয় কর:
(ক) সর্বাধিক উচ্চতা।
(খ) সর্বাধিক উচ্চতা ওঠার সময়।
(গ) অনুভূমিক পাল্লা (ঘ) ভূমিতে আঘাত করার সময়।

সমাধান: ধরা যাক, যে বিন্দু থেকে বস্তুটি নিক্ষেপ করা হয় সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিকে γ-অক্ষ ধনাত্মক।
আমরা জানি,

(ক) $$h_m = \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g}$$

$$= \frac{(40ms^{-1}\times\sin 60^0)^2}{2\times 9.8ms^{-2}}$$

$$= 61.22m$$

(খ) $$t_m = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

$$= \frac{40ms^{-1}\times\sin 60^0}{9.8ms^{-2}}$$

$$= 3.53s$$

(গ) $$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$$= \frac{(40ms^{-1})^2\times\sin 120^0}{9.8ms^{-2}}$$

$$= 141.39m$$

(ঘ) $$T = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{2\times 40ms^{-1}\times\sin 60^0}{9.8ms^{-2}} = 7.07s$$

এখানে,
$x_0 = y_0 = 0$
আদিবেগ, $v_0 = 40ms^{-1}$
নিক্ষেপ কোণ, $\theta_0 = 60^0$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$
(ক) সর্বাধিক উচ্চতা, $h_m = ?$
(খ) সর্বাধিক উচ্চতা ওঠার সময়, $t_m = ?$
(গ) অনুভূমিক পাল্লা, $R = ?$
(ঘ) ভূমিতে আঘাত করার সময় তথা
উড্ডয়নকাল, $T = ?$

উত্তর: (ক) 61.22m (খ) 3.53s (গ) 141.39m (ঘ) 7.07 s

প্রশ্ন-১৭: **একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 48m এবং আদি বেগ $33ms^{-1}$। নিক্ষেপ কোণ কত?**

সমাধান: আমরা জানি,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$\therefore \sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{48m \times 9.8ms^{-2}}{(33ms^{-1})^2}$$

$$= 0.43196$$

$$\therefore 2\theta_0 = 25.6^0 \therefore \theta_0 = 12.8^0$$

এখানে,

অনুভূমিক পাল্লা, $R = 48m$

আদি বেগ, $v_0 = 33ms^{-1}$

নিক্ষেপ কোণ, $\theta_0 = ?$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

উত্তর: 12.8^0

প্রশ্ন-১৮: **কোন নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগ ও অনুভূমিকের সাথে কোণ কত হলে ঐ বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা 79.5m এবং বিচরণ কাল 5.3s হবে?**

সমাধান: আমরা জানি,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \text{ ....(1)}$$

এবং $T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$ ....(2)

বা, $v_0 = \frac{Tg}{2\sin \theta_0}$ ....(3)

এখানে,

অনুভূমিক পাল্লা, $R = 79.5m$

বিচরণকাল, $T = 5.3s$

নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগ, $v_0 = ?$

নিক্ষেপ কোণ, $\theta_0 = ?$

(1) নং সমীকরণে v_0 এর মান বসিয়ে,

$R = \left(\frac{Tg}{2\sin \theta_0}\right)^2 \frac{2\sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$ বা, $R = \frac{T^2 g \cos \theta_0}{2\sin \theta_0}$

বা, $\frac{1}{R} = \frac{2\sin \theta_0}{T^2 g \cos\theta_0} = \frac{2\tan \theta_0}{T^2 g}$ বা, $\tan\theta_0 = \frac{T^2 g}{2R} = \frac{(5.3s)^2 \times 9.8\ ms^{-2}}{2 \times 79.5\ m}$

বা, $\tan \theta_0 = 1.73$

$\therefore \theta_0 = 60^0$ (প্রায়)

আবার, $v_0 = \frac{Tg}{2\sin \theta_0} = \frac{5.3s \times 9.8ms^{-2}}{2\sin 60^0} = 30ms^{-1}$ (প্রায়)

উত্তর: $30ms^{-1}; 60^0$

প্রশ্ন-১৯: **একটি 588 N ওজনের বস্তুকে 0.70 ms^{-2} ত্বরণ দিতে এর ওপর কত বল প্রয়োগ করতে হবে?**

সমাধান: বস্তুর ভর m হলে,

$$W = mg$$

বা, $m = \frac{W'}{g} = \frac{588N}{9.8ms^{-2}}$

বস্তুর ওজন, $W = 588N$

ত্বরণ, $a = 0.70ms^{-2}$

বল, $F = ?$

$= 60kg$

$\therefore\ F = ma = 60kg \times 0.70ms^{-2}$

$= 42N$

$g = 9.8ms^{-2}$

উত্তর: 42 N

প্রশ্ন-২০: 30 kg ভরে একটি বস্তুর ওপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে এর বেগ 36 km h^{-1} বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান: আমরা জানি,

ত্বরণ a হলে,

$F = ma$

$= m\dfrac{\Delta v}{t}$

$= 30kg \times \dfrac{10ms^{-1}}{60s}$

$= 5N$

এখানে,

ভর, $m = 30\ kg$

সময়, $t = 1\min = 60s$

বেগ বৃদ্ধি, $\Delta v = 36km\ h^{-1}$

$= \dfrac{36\times 10^3 m}{3600s} = 10ms^{-1}$

বল, $F = ?$

উত্তর: 5 N

প্রশ্ন-২১: গাছ থেকে 2 kg এর একটি নারকেল সোজা নিচের দিকে পড়ছে। বাতাসের বাধা যদি 8.6 N হয়, তাহলে নারকেলটির ত্বরণ কত?

সমাধান: ধরি, খাড়া নিচের দিক ধনাত্মক।

আমরা জানি,

$\sum F = ma$

$19.6N - 8.6N = (2kg)a$

$\therefore\ a = \dfrac{11N}{2kg} = 5.5ms^{-2}$

এখানে,

নারকেলের ভর, $m = 2kg$

নারকেলের ওজন, $F_1 = 2kg \times 9.8ms^{-2} = 19.6N$

বাতাসের বাধা, $F_2 = -8.6N$

ত্বরণ, $a = ?$

উত্তর: $5.5\ ms^{-2}$

প্রশ্ন-২২: 9.1×10^{-31}kg ভরের একটি স্থির ইলেকট্রনের ওপর 1.6×10^{-16}N বল 10^{-9}s ধরে কাজ করে। এই সময় শেষে ইলেকট্রনের বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, বস্তুর ত্বরণ a হলে,

$v = v_0 + at$

কিন্তু $F = ma$

$a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{1.6\times10^{-16}N}{9.1\times10^{-31}kg}$

$= 1.76\times10^{14}ms^{-2}$

$\therefore\ v = 0 + 1.76\times10^{14}ms^{-2}\times10^{-9}s$

$= 1.76\times10^{5}ms^{-1}$

এখানে,

ভর, $m = 9.1\times10^{-31}kg$

আদি বেগ, $v_0 = 0$

বল, $F = 1.6\times10^{-16}N$

সময়, $t = 10^{-9}s$

শেষ বেগ, $v = ?$

উত্তরঃ $1.76\times10^5 ms^{-1}$

প্রশ্ন-২৩ঃ 108 kmh^{-1} বেগে চলমান একটি গাড়ির চালক 45.5m দূরে একটি বালককে দেখতে পেলেন। সাথে সাথে ব্রেক চেপে দেয়ায় বালকটির 50cm সামনে এসে গাড়িটি থেমে গেল। গাড়িটি থামতে কত সময় লাগল এবং এর ওপর কত বল প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। আরোহীসহ গাড়ির ভর 1000 kg।

সমাধানঃ আমরা জানি, ত্বরণ a হলে,

$v=v_0+at$

বা, $t=\dfrac{v-v_0}{a}$ ....(1)

এখন, ত্বরণের জন্য

$v^2=v_0^2+2as$

$a=\dfrac{v^2-v_0^2}{2s}$

$=\dfrac{0-(30ms^{-1})^2}{2\times45m}=-10ms^{-2}$

এখানে,

গাড়ির আদি বেগ, $v_0=108km\,h^{-1}$

$=\dfrac{108\times10^3 m}{3600s}=30ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v=0$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s=45.5m-0.5m=45m$

গাড়ির ভর, $m=1000kg$

সময়, $t=?$

বল, $F=?$

(1) সমীকরণে এই মান বসিয়ে,

$t=\dfrac{0-30ms^{-1}}{-10ms^{-2}}=3s$

আবার,

$F=ma$

$=1000kg\times(-10ms^{-2})$

$=-10^4N$

ঋণাত্মক চিহ্ন বাধাদানকারী বল নির্দেশ করে।

উত্তরঃ 3s, -10^4N

প্রশ্ন-২৪ঃ 10N এর একটি বল 2 kg ভরবিশিষ্ট একটি স্থির বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে। যদি 4s পর বলের ক্রিয়া বন্ধ হযে যায়, তবে প্রথম থেকে 8 সেকেন্ডে বস্তুটি কত দূর যাবে?

সমাধানঃ বল প্রয়োগের জন্য বস্তুটি প্রথম 4s সমত্বরণে চলবে এবং বল প্রযুক্ত না হওয়ায় প্রথম 4 সেকেন্ড পরে যে বেগ হবে সেই বেগ নিয়ে পরবর্তী 4 সেকেন্ড সমবেগে চলবে।

আমরা জানি,

$s_1=v_0t_1+\dfrac{1}{2}at_1^2$

কিন্তু $F=ma$ বা, $a=\dfrac{F}{m}$

এখানে,

প্রথম 4 সেকেন্ডের জন্য

আদিবেগ, $v_0=0$

বল, $F=10N$

$\therefore\ a = \frac{10N}{2kg} = 5ms^{-2}$

$\therefore\ s_1 = 0 + \frac{1}{2} \times 5ms^{-2} \times (4s)^2$ = 40 m

ভর, $m = 2kg$

সময়, $t_1 = 4s$

দূরত্ব, $s_1 = ?$

এই 4s পরে শেষ বেগ v হলে,

$v = v_0 + at_1$

= $0 + 5ms^{-2} \times 4s$

= $20ms^{-1}$

আমরা জানি,

$s_2 = vt_2$

$= 20ms^{-1} \times 4s$

= $80m$

পরবর্তী 4s এর জন্য

সমবেগ, $v = 20ms^{-1}$

সময়, $t_2 = 4s$

দূরত্ব, $s_2 = ?$

$\therefore$ প্রথম থেকে 8 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব; $s = s_1 + s_2 = 40m + 80m = 120m$

উত্তরঃ$120m$

প্রশ্ন-২৫ঃ 10g ভরের একটি বুলেট 6 kg ভরের একটি বন্দুক থেকে 300 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত হল। বন্দুকটির পশ্চাৎ বেগ কত হবে?

সমাধানঃ

ধরা যাক, বুলেটের বেগের দিকে ধনাত্মক।

ভরবেগের নিত্যতার সুত্র থেকে আমরা জানি,

গুলি ছোঁড়ার আগে বন্দুক ও বুলেট স্থির থাকায়,

MV+mv = 0

$(6kg)V + 10 \times 10^{-3}kg \times 300ms^{-1} = 0$

বা, $V = -0.5ms^{-1}$

এখানে,

বুলেটের ভর, $m = 10g = 10 \times 10^{-3}kg$

বন্দুকের ভর, $M = 6kg$

বুলেটের শেষ বেগ, $v = 300ms^{-1}$

বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ, $V = ?$

বন্দুকের বেগ ঋণাত্মক, অর্থাৎ বুলেটের বেগ যে দিকে, রাইফেলের বেগ তার পশ্চাৎ দিকে।

উত্তরঃ পশ্চাৎ বেগ $0.5ms^{-1}$

প্রশ্ন-২৬ঃ 12 kg এবং 15 kg ভরের দুটি বস্তু পরস্পর বিপরীত দিকে যথাক্রমে 5 ms^{-1} এবং 3ms^{-1} বেগে যাওয়ার পথে একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তু দুটি একত্রে যুক্ত থেকে কত বেগে চলবে?

সমাধানঃ

ধরা যাক, প্রথম বস্তু যে দিকে যায় সে দিক ধনাত্মক।

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা জানি,

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$

$12kg \times 5ms^{-1} + 15kg \times (-3ms^{-1})$

প্রথম বস্তুর ভর, $m_1 = 12kg$

দ্বিতীয় বস্তুর ভর, $m_2 = 15kg$

প্রথম বস্তুর আদি বেগ, $v_{1i} = 5ms^{-1}$

দ্বিতীয় বস্তুর আদি বেগ, $v_{2i} = -3ms^{-1}$

$= (12kg + 15kg)v_f$

মিলিত হওয়ার পর তাদের বেগ, $v_f = ?$

বা, $(27kg)v_f = 15kgms^{-1}$

$\therefore\ v_f = 0.556ms^{-1}$

উত্তরঃ $0.556ms^{-1}$

প্রশ্ন-২৭ঃ 70 kg ভরের বাক্সকে 500N অনুভূমিক বলে মেঝের ওপর দিয়ে টানা হচ্ছে। বাক্সটি যখন চলে তখন বাক্স ও মেঝের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ সহগ 0.50। বাক্সের ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,

$F - f_k = ma$

আবার, $\mu_k = \dfrac{f_k}{R}$

$\therefore\ f_k = \mu_k \times R = 0.5 \times 686N$ = 343N

$\therefore\ a = \dfrac{F - f_k}{m} = \dfrac{500N - 343N}{70kg}$ =2.24ms^{-2}

উত্তরঃ $2.24ms^{-2}$

এখানে,

বাক্সের ভর, $m = 70kg$

তলের অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়া= বাক্সের ওজন

$\therefore\ R = 70kg \times 9.8ms^{-2} = 686N$

গতীয় ঘর্ষণ সহগ, $\mu_k = 0.50$

গতীয় ঘর্ষণ বল, $f_k = ?$

বাক্সের ওপর প্রযুক্ত বল, $F = 500N$

বাক্সের ত্বরণ, $a = ?$

প্রশ্ন-২৮ঃ কোন মেঝেতে স্থাপিত 400N এর একটি কাঠের ব্লকের ওপর অনুভূমিকভাবে 160N বল প্রয়োগ করলে এটি চলার উপক্রম হয়। মেঝে ও কাঠের ব্লকের মধ্যবর্তী ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,

$\mu_S = \dfrac{f_S}{R}$

$= \dfrac{160N}{400N}$

= 0.4

উত্তরঃ 0.4

এখানে,

তলের অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়া= বস্তুর ওজন

$\therefore$ R= 400N

স্থিতি ঘর্ষণ বল, $f_S = 160N$

স্থিতি ঘর্ষণাঙ্ক, $\mu_S = ?$

সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহঃ

সমীকরণ

- $\theta = \theta_0 + \omega t$
- $\theta = \theta_0\left(\dfrac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t$
- $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
- $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$

- $\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
- $E = \frac{1}{2} I\omega^2$
- $I = \sum mu^2$
- $I = MK^2$
- $\tau = I\alpha$
- $L = I\omega$
- $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$
- $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

[গাণিতিক সমস্যাবলি]

প্রশ্ন-২৯: একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে সমকৌণিক ত্বরণে চললে 1 মিনিটে 90π রেডিয়ান কৌণিক সরণ হয়। কণাটির কৌণিক ত্বরণ কত?

সমাধান: আমরা জানি,

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

বা, $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$

বা, $90\pi\ rad = 0 + \frac{1}{2}\alpha(60s)^2$

$$\therefore\ \alpha = \frac{2\times 90\pi\ rad}{60\times 60s^2}$$

$$\therefore\ \alpha = 0.157\ rad\ s^{-2}$$

এখানে,

আদি কৌণিক বেগ, $\omega_0 = 0$

সময়, $t = 1\min = 60s$

কৌণিক সরণ, $\theta - \theta_0 = 90\,\pi\ rad$

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = ?$

উত্তর: $0.157\ rad\ s^{-2}$

প্রশ্ন-৩০: একটি বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 1200 বার ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার ৩ মিনিট পর পাখাটি বন্ধ হয়ে গেল। পাখাটির কৌণিক ত্বরণ কত? থেমে যাওয়ার আগে পাখাটি কত বার ঘুরবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 = 40\pi\ rad\ s^{-1} + \alpha\times 180s$$

$$\therefore\ \alpha = -0.7\ rad\ s^{-2}$$

এখানে,

আদি কৌণিক বেগ, $\omega_0 = 1200\ rev\ \min^{-1}$

আবার,

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t$$

$= \dfrac{1200 \times 2\pi\ rad}{60s} = 40\pi\ rad\ s^{-1}$

সময়, $t = 3\min = 180s$

শেষ কৌণিক বেগ, $\omega_f = 0$

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = ?$

কৌণিক সরণ, $\theta - \theta_0 = ?$

বা, $\theta - \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t$

$= \left(\dfrac{40\pi\ rad\ s^{-1} + 0}{2}\right) \times 180s = 3600\ \pi\ rad = \dfrac{3600\pi}{2\pi} rev$

$\therefore\ \theta - \theta_0 = 1800\ rev$

উত্তর: $-0.7\ rad\ s^{-2}; 1800\ rev$

প্রশ্ন-৩১: একটি ঘূর্ণায়মান বস্তুর ভর 2 kg। ঘূর্ণন অক্ষ থেকে এর দূরত্ব 1m। বস্তুটির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। বস্তুটি 5 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরলে এর ঘূর্ণন গতিশক্তি নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$I = mr^2 = 2kg \times (1m)^2$

$= 2\ kg\ m^2$

আবার,

$E = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2} \times 2\ kg\ m^2 \times (5\ rad\ s^{-1})^2 = 25J$

উত্তর: $2kgm^2; 25J$

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 2kg$

ঘূর্ণন অক্ষ থেকে দূরত্ব, $r = 1m$

জড়তার ভ্রামক, $I = ?$

কৌণিক বেগ, $\omega = 5rad\ s^{-1}$

ঘূর্ণন গতিশক্তি, $E = ?$

প্রশ্ন-৩২: একটি চাকার ভর 10 kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0.5m। এর জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$I = MK^2$

$= 10kg \times (0.5m)^2$

$= 2.5kg\ m^2$

এখানে,

ভর, $M = 10kg$

চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = 0.5m$

জড়তার ভ্রামক, I=?

উত্তর: $2.5\ kg\ m^2$

প্রশ্ন-৩৩: একটি চাকার ভর 4 kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm। এর জড়তার ভ্রামক কত? চাকাটিতে 2 rad s^{-2} কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে?

সমাধান: আমরা জানি,

$I = MK^2$

এখানে,

ভর, $M = 4\ kg$

$= 4kg \times (0.25m)^2$

$= 0.25kg\ m^2$

আবার, $\tau = I\alpha$

$= 0.25kg\ m^2 \times 2\ rad\ s^{-2}$

$= 0.5N\ m$

চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = 25\ cm = 0.25m$

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = 2\ rad\ s^{-2}$

জড়তার ভ্রামক, $I = ?$

টর্ক, $\tau = ?$

উত্তর: $0.25kg\ m^2; 0.5N\ m$

প্রশ্ন-৩৪: মঙ্গল গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে 2.28×10^{11}m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরে ধরে নিয়ে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। মঙ্গলের ভর 6.46×10^{23}kg এবং আবর্তনকাল 5.94×10^7s ।

সমাধান: জড়তার ভ্রামক I এবং কৌণিক বেগ ω হলে,

$L = I\omega$

কিন্তু $I = mr^2$

এবং $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$L = mr^2 \frac{2\pi}{T}$

এখানে,

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 2.28 \times 10^{11} m$

ভর, $m = 6.46 \times 10^{23} kg$

আবর্তনকাল, $T = 5.94 \times 10^7 s$

কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

$$= \frac{6.46 \times 10^{23} kg \times (2.28 \times 10^{11} m)^2 \times 2 \times 3.14}{5.94 \times 10^7 s} = 3.55 \times 10^{39} kg\ m^2 s^{-1}$$

উত্তর: $3.55 \times 10^{39} kg\ m^2 s^{-1}$

প্রশ্ন-৩৫: 10g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 2m দীর্ঘ সুতার সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘুরানো হচ্ছে। বস্তুটি 3s-এ 15টি পূর্ণ আবর্তন করলে সুতার টান নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$F = m\omega^2 r$

$$= \frac{m \times 4\pi^2 \times N^2 \times r}{t^2}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-3} kg \times 4 \times 9.87 \times (15)^2 \times 2m}{(3s)^2}$$

$= 19.74N$

এখানে,

ভর, $m = 10g = 10^{-11} m$

ব্যাসার্ধ, $r = 2m$

ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 15$

ঘূর্ণনকাল, $t = 3s$

$\pi^2 = 9.87$

সুতার টান, $F = ?$

উত্তর: $19.74N$

প্রশ্ন-৩৬: বোরের হাইড্রোজেন পরমাণুর মডেলে একটি ইলেকট্রন একটি প্রোটনের চারদিকে 5.2×10^{-11}m ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পথে $2.18\times10^{6}\text{ms}^{-1}$ বেগে প্রদক্ষিণ করে। ইলেকট্রনের ভর 9.1×10^{-31}kg হলে কেন্দ্রমুখী বলের মান কত?

সমাধান: আমরা জানি,

$$F=\frac{mv^2}{r}$$

$$=\frac{9.1\times10^{-31}kg\times(2.18\times10^{6}ms^{-1})^2}{5.2\times10^{-11}m}$$

$$=8.32\times10^{-8}N$$

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $r=5.2\times10^{-11}m$

বেগ, $v=2.18\times10^{6}ms^{-1}$

ভর, $m=9.1\times10^{-31}kg$

কেন্দ্রমুখী বল, $F=?$

উত্তর: $8.32\times10^{-8}N$

প্রশ্ন-৩৭: 75m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে কোন মোটর সাইকেল আরোহী কত বেগে ঘুরলে উল্লম্ব তলের সাথে 30^0 কোণে আনত থাকবেন নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$$\tan\theta=\frac{v^2}{rg}$$

$$v^2=rg\tan\theta$$

$$=75m\times9.8ms^{-2}\times\tan30^0$$

$$=424.25m^2s^{-2}$$

$$\therefore\ v=20.6ms^{-1}$$

এখানে,

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r=75m$

উল্লম্ব তলের সাথে আরোহীর কোণ, $\theta=30^0$

আরোহীর বেগ, $v=?$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=9.8ms^{-2}$

উত্তর: $20.6ms^{-1}$

প্রশ্ন-৩৮: একটি সিলিন্ডারের ভর 50kg এবং 0.20m। সিলিন্ডারটির অক্ষের সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক 1.0 kg m^2। সিলিন্ডারটি যখন $2ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিকভাবে গড়াতে থাকে তখন তার মোট গতিশক্তি কত হবে?

সমাধান: কৌণিক বেগ ω হলে,

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{2ms^{-1}}{0.20m}=10rads^{-1}$$

মোট গতিশক্তি = চলন গতিশক্তি + ঘূর্ণন গতিশক্তি

$$K=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

এখানে,

ভর, $m=50kg$

ব্যাসার্ধ, $r=0.20m$

জড়তার ভ্রামক, $I=1.0kg\ m^2$

বেগ, $v=2ms^{-1}$

মোট গতিশক্তি, $K=?$

$$=\frac{1}{2}\times50kg\times(2ms^{-1})^2+\frac{1}{2}\times1.0kgm^2\times(10rads^{-1})^2$$

= 150J

উত্তর: 150J

সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহ:

সমীকরণ

- $W = FS\cos\theta$
- $W_S = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- $K = \frac{P^2}{2m}$
- $W = K - K_0 = \Delta K$
- $U = mgh$
- $P = \frac{W}{t}$
- $P = Fv$

[গাণিতিক সমস্যাবলি]

প্রশ্ন-৩৯: 2N বল কোন নির্দিষ্ট ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়া করায় বস্তুটি বলের দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে 5m দূরে সরে গেল। কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$W = FS\cos\theta$

$= 2N \times 5m \times \cos 60^0$

$= 5J$

উত্তর: 5J

এখানে,

বল, F = 2 N

সরণ, S = 5 m

সরণ ও বলের অন্তর্ভূক্ত কোণ, $\theta = 60^0$

কাজ, W=?

প্রশ্ন-৪০: একটি কণার উপর $\vec{\mathbf{F}} = (12\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{j}})\mathbf{N}$ বল প্রয়োগ করলে কণাটির $\vec{\mathbf{r}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}})\mathbf{m}$ সরণ হয়। বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$W = \vec{F}.\vec{r}$

$= (12\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{j})N.(4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})m$

$= 12N \times 4m + (-6N) \times 4m \times 4N \times (-2m)$

$= 48J - 24J - 8J$

= 16 J

উত্তর: 16 J

এখানে,

বল, $\vec{F} = (12\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{j})N$

সরণ, $\vec{r} = (4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})m$

কাজ, $W = ?$

প্রশ্ন-৪১: 100 kg ভরের একটি বস্তুর ভরবেগ 200 kg ms^{-1} হলে এর গতি শক্তি বের কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$K=\frac{p^2}{2m}$

$=\frac{(200kg\ ms^{-1})^2}{2\times100kg}$

$K=200J$

এখানে,

ভর, $m=100kg$

ভরবেগ, $p=200\ kg\ ms^{-1}$

গতিশক্তি, $K=?$

উত্তরঃ 200 J

প্রশ্ন-৪২ঃ একটি নিউট্রনের ভর 1.67×10^{-27}kg এবং এটি 4×10^4 ms^{-1} বেগে গতিশীল। এর গতি শক্তি কত?

সমাধানঃ আমরা জানি,

গতি শক্তি, $K=\frac{1}{2}mv^2$

$=\frac{1}{2}\times1.67\times10^{-27}kg\times(4\times10^4ms^{-1})^2$

$=13.36\times10^{-19}J$

এখানে,

নিউট্রনের ভর, $m=1.67\times10^{-27}kg$

নিউট্রনের বেগ, $v=4\times10^4ms^{-1}$

উত্তরঃ $13.36\times10^{-19}J$

প্রশ্ন-৪৩ঃ একটি রাইফেলের গুলি একটি তক্তাকে কেবল ভেদ করতে পারে। যদি গুলির বেগ পাঁচগুণ করা হয় তবে অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে?

সমাধানঃ মনে করি, গুলির ভর, m এবং গুলির বেগ, v

$\therefore$ একটি তক্তা ভেদ করতে প্রয়োজনীয় গতি শক্তি, K_1

$\therefore\ K_1=\frac{1}{2}mv^2$

বেগ তিনগুণ করা হলে ধরা যাক, গতি শক্তি K_2 হবে,

$\therefore\ K_2=\frac{1}{2}m(5v)^2=\frac{1}{2}m\times25v^2=25\times\frac{1}{2}mv^2=25\times K_1=25\times$ একটি তক্তা ভেদ করার জন্য প্রয়োজনীয় গতি শক্তি।

$\therefore$ বেগ পাঁচগুণ হলে গুলিটি অনুরূপ 25টি তক্তা ভেদ করতে পারবে।

প্রশ্ন-৪৪ঃ 14 g ভরের একটি রাইফেলের গুলি $3.6ms^{-1}$ বেগে 0.21 m পুরু একটি কাঠের গুড়ি কেবল ভেদ করতে পারে। বাধাদানকারী বলের মান বের কর।

সমাধানঃ আমরা জানি, কৃত কাজ W হলে

W= ΔK

বা, $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

বা, $FS=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)$

এখানে,

ভর, $m=14g=14\times10^{-3}kg$

আদি বেগ, $v_0=3.6ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v=0$

সরণ, $S=0.21m$

বা, $F = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2S}$

$= \frac{14\times10^{-3}kg\times[0-(3.6ms^{-1})^2]}{2\times0.21m}$

$= -0.432N$

বল, $F = ?$

উত্তরঃ $-0.432N$

প্রশ্ন-৪৫ঃ 5 kg ভরের কোন বস্তুকে কত উঁচু থেকে ফেললে এর গতি শক্তি 27 kmh^{-1} বেগে চলমান 2000 kg লরীর গতি শক্তির সমান হবে?

সমাধানঃ লরীর গতি শক্তি,

$K_1 = \frac{1}{2}Mv^2$

$= \frac{1}{2}\times2000kg\times(7.5ms^{-1})^2$

বস্তুর গতি শক্তি = সম্পন্ন কাজ

$K_2 = mgh$

$= 5kg\times9.8ms^{-2}\times h$

এখানে,

লরীর ভর, $M = 2000kg$

লরীর বেগ, $v = 27\ kmh^{-1}$

$= \frac{27\times10^3m}{3600s} = 7.5ms^{-1}$

বস্তুর ভর, m= 5 kg

উচ্চতা, h=?

এখন প্রশ্নানুসারে, বস্তুর গতি শক্তি = লরীর গতি শক্তি

$K_2 = K_1$

$5kg\times9.8ms^{-2}\times h = \frac{1}{2}\times2000kg\times(7.5ms^{-1})^2$

$\therefore\ h = 1147.96m$

উত্তরঃ $1147.96m$

প্রশ্ন-৪৬ঃ 64m উঁচু স্থান হতে 0.5 kg ভরের একটি বস্তুকে খাড়া নিচে ফেলে দেওয়া হল। ভূমি স্পর্শ করার মুহূর্তে বস্তুটির গতিশক্তি বের কর। g=9.8ms^{-1}।

সমাধানঃ আমরা জানি,

h উচ্চতা থেকে পড়ন্ত কোন বস্তুর ভূমি স্পর্শ করার মূহূর্তে গতিশক্তি = h উচ্চতায় স্থিতিশক্তি

$\therefore$ গতিশক্তি, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$= 0.5\times64m\times9.8ms^{-2}$

$= 313.6J$

এখানে,

ভর, $m = 0.5kg$

উচ্চতা, $h = 64m$

$g = 9.8ms^{-2}$

গতিশক্তি = ?

উত্তরঃ $313.6J$

প্রশ্ন-৪৭ঃ 0.50 kg ভরের একটি বোমা ভূমি হতে 1 km উঁচুতে অবস্থিত একটি বিমান থেকে ফেলে দেয়া হল। ভূমি স্পর্শ করার পূর্বমুহূর্তে এর গতি শক্তি বের কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,

ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বেগ v হলে

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

কিন্তু $v^2 = v_0^2 + 2as$

এখানে, আদিবেগ, $v_0 = 0$

ত্বরণ, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

সরণ, S= উচ্চতা h= 10^3m

$\therefore\ v^2 = 0 + 2 \times 9.8ms^{-2} \times 10^3 m$

$= 19600m^2s^{-2}$

$\therefore\ K = \frac{1}{2}0.5kg \times 19600m^2s^{-2}$

$= 4900J$

উত্তরঃ 4900J

এখানে,

ভর, $m = 0,50kg$

উচ্চতা, $h = 1km = 10^3 m$

গতি শক্তি, $K = ?$

প্রশ্ন-৪৮ঃ 30m উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে বিনা বাধায় পড়তে দিরে কোথায় এর গতি শক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ হবে?

সমাধানঃ মনে করি, বস্তুর ভর= m এবং বস্তুর মোট উচ্চতা, h=30m

ধরা যাক, ভূমি থেকে x উচ্চতায় গতি শক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ হবে।

x উচ্চতায় বস্তুর বিভব শক্তি, U=mgx দ্বিগুণ হবে।

$\therefore$ x উচ্চতায় বস্তুর গতি শক্তি, K=2U=2 mgx

h উচ্চতায় মোট শক্তি তথা বিভব শক্তি, E=mgh

এখন শক্তির নিত্যতা সূত্রানুসারে x উচ্চতায়

$$K + U = E$$

$$2mgx + mgx = mgh$$

বা, $3x = h$ বা, $x = \frac{h}{3} = \frac{30m}{3} = 10m$

উত্তরঃ 10m

প্রশ্ন-৪৯ঃ 74.6 kg ভরের একজন লোক প্রতিটি 25cm উঁচু সিঁড়ি 10s এ উঠতে পারেন। তার ক্ষমতা কত?

সমাধানঃ আমরা জানি,

কৃতকাজ W হলে,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{FS}{t}$$

$$= \frac{731.08N \times 5m}{10s}$$

P= 365.54W

উত্তরঃ 365.54W

এখানে,

লোকের ভর, $m = 74.6kg$

বল, F= লোকটির ওজন= $mg = 74.6kg \times 9.8ms^{-2}$

$= 731.08N$

সরণ, S = উচ্চতা = $20 \times 25cm = 500cm = 5m$

সময়, t=10s

ক্ষমতা, P=?

প্রশ্ন-৫০ঃ 270kg ভরের একটি বোঝা একটি ক্রেনের সাহায্যে $0.1ms^{-1}$ বেগে উঠাতে হলে ক্রেনের ক্ষমতা কত?

সমাধানঃ আমরা জানি,

$P = Fv$

$= 2646N \times 0.1ms^{-1}$

$= 264.6W$

উত্তর: $264.6W$

এখানে,

বোঝার ভর, $m = 270kg$

বল, F= বোঝার ওজন

$= mg = 270kg \times 9.8ms^{-2}$

= 2646N

বেগ, v= $0.1ms^{-1}$

ক্ষমতা, P=?

প্রশ্ন-৫১: একটি লিফ্‌টের কেবল্‌ লিফ্‌টিকে $0.75ms^{-1}$ সমদ্রুতিতে ওপরে তুলতে পারে। কেবল্‌টি 23 kW ক্ষমতা প্রয়োগ করলে কেবল্‌ এর টান বের কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$P = Fv$

$F = \frac{P}{v}$

$= \frac{23 \times 10^3 W}{0.75ms^{-1}}$

$= 30.67 \times 10^3 N$

উত্তর: $30.67 \times 10^3 N$

এখানে,

বেগ, $v = 0.75ms^{-1}$

ক্ষমতা, $P = 23kW = 23 \times 10^3 W$

বল বা টান, $F = ?$

প্রশ্ন-৫২: একটি দালানের ছাদের সাথে লাগান 5m লম্বা একটি মই অনুভূমিকের সাথে 30^0 কোণ করে আছে। 60kg ভরের এক ব্যক্তি 20 kg ভরের বোঝা নিয়ে 10 সেকেন্ডে ছাদে ওঠেন। তার অশ্বক্ষমতা বের কর।

সমাধান: আমরা জানি,

$P = \frac{W}{t}$

কিন্তু কাজ, $W = FS\cos\theta$

$= 784N \times 5m \times \cos 60^0$

$= 784N \times 5m \times \frac{1}{2}$

= 1960J

$\therefore P = \frac{1960}{10} W$

এখানে,

বল, F = ব্যক্তির ওজন + বোঝার ওজন

$= (60kg + 20kg) \times 9.8ms^2$

$= 784N$

সরণ, $S = 5m$

বল ও সরণের অন্তর্ভূক্ত কোণ, θ

= মই ও উল্লম্বের অন্তর্ভূক্ত কোণ

$= 90^0 - 30^0 = 60^0$

সময়, t=10s

$= 196W$

$= \frac{196}{746} H.P.$

= 0.26 H.P.

উত্তর: 0.26 H.P.

ক্ষমতা, P= ?

প্রশ্ন-৫৩: কোন কুয়া থেকে 20m ওপরে পানি তোলার জন্য 6 kW এর একটি পাম্প ব্যবহার করা হচ্ছে। পাম্পের দক্ষতা 88.2% হলে প্রতি মিনিটে কত লিটার পানি তোলা যাবে?

সমাধান: আমরা জানি,

পাম্পের কার্যকর ক্ষমতা,

$$P = \frac{88.2}{100} P'$$

$$= \frac{88.2}{100} \times 6 \times 10^3 W$$

$$= 5292W$$

এখানে,

পাম্পের ক্ষমতা, $P' = 6kW = 6 \times 10^3 W$

দক্ষতা, η = 88.2%

সরণ, h= 20m

সময়, t=1 min = 60s

পানির আয়তন, v=?

আবার,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fh}{t} = \frac{mgh}{t}$$

$$\therefore \; m = \frac{Pt}{gh} = \frac{5292W \times 60s}{9.8ms^{-2} \times 20m} = 1620kg$$

যেহেতু 1kg পানির আয়তন 1 litre

∴ পানির আয়তন, v= 1620 litre

উত্তর: 1620 litre

প্রশ্ন-৫৪: 100 m গভীর একটি কুয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000 kg পানি উঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 42% নষ্ট হয়, তাহলে এর অশ্বক্ষমতা কত?

সমাধান: আমরা জানি,

কৃত কাজ W হলে,

কার্যকর ক্ষমতা,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fh}{t}$$

$$= \frac{mgh}{t}$$

$$= \frac{1000kg \times 9.8ms^{-2} \times 100m}{60s}$$

$$= 1.63 \times 10^4 W$$

পানির ভর, $m = 1000kg$

সরণ, $h = 100m$

সময়, $t = 1\min = 60s$

ইঞ্জিনের ক্ষমতা, $P' = ?$

ইঞ্জিনের কার্যকর ক্ষমতা, $P = P'$ এর (100-42)%

বা, 58%

$= \frac{58}{100} P' = 0.59P'$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8ms^{-2}$

আবার, $0.58P' = P$

বা, $0.59P' = 1.63 \times 10^4 W$

উত্তরঃ

প্রশ্ন-৫৫ঃ 20m উঁচু একটি দালানের ছাদ থেকে m ভরের একটি টেনিস বল গড়িয়ে মাটিতে পড়ে। বলটি যখন ভূমি স্পর্শ করে তখন এর বেগ $22ms^{-1}$। বলটি ছাদ ত্যাগ করার মুহূর্তে কত বেগে গড়াচ্ছিল। (শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি ব্যবহার কর।)

সমাধানঃ শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি থেকে আমরা জানি,

$K_i + U_i = K_f + U_f$

$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$

বা, $\frac{1}{2}v_i^2 + gh = \frac{1}{2}v_f^2$

এখানে,

ছাদের উচ্চতা, $h = 20m$

শেষ বেগ, $v_f = 22ms^{-1}$

আদি বেগ, $v_i = ?$

বা, $\frac{1}{2}v_i^2 + 9.8ms^{-2} \times 20m = \frac{1}{2} \times (22ms^{-1})^2$

বা, $\frac{1}{2}v_i^2 + 196m^2s^{-2} = 242m^2s^{-2}$

বা, $\frac{1}{2}v_i^2 = 46m^2s^{-2}$

$\therefore\ v_i^2 = 92m^2s^{-2}$

$v_i = 9.59ms^{-1}$

উত্তরঃ $9.59ms^{-1}$

প্রশ্ন-৫৬ঃ একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা এবং ব্যাস যথাক্রমে 10m ও 4m। একটি পাম্প 20 মিনিটে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে পারে। পাম্পের অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,

$P = \frac{W}{t}$

কিন্তু কাজ, W=F×h

এখানে F হচ্ছে পানির ওজন,

F=mg

কিন্তু m হচ্ছে কুয়ার পানির ভর।

পানির ঘনত্ব ρ এবং আয়তন V হলে,

m= Vρ

কিন্তু পানির আয়তন হচ্ছে কুয়ার আয়তন।

এখানে,

কুয়ার গভীরতা, $t = 10m$

কুয়ার ব্যাস, $d = 4m$

$\therefore$ কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = 2m$

সময়, $t = 20\min = .20 \times 60 = 1200s$

পানি ওঠানোর কার্যকর বা গড় উচ্চতা,

$$h = \frac{0 + 10m}{2} = 5m$$

ক্ষমতা, $P = ?$

$\therefore V = \pi r^2 \ell$

সুতরাং $P = \frac{W}{t} = \frac{Fh}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{V\rho gh}{t} = \frac{\pi r^2 t\rho gh}{t}$

$= \frac{3.14 \times (2m)^2 \times 10m \times 10^3 kg\ m^{-3} \times 9.8ms^{-2} \times 5m}{1200s}$

$= 5128.67W = \frac{5128.67}{749} H.P. = 6.87 H.P$

উত্তরঃ $6.87 H.P.$